EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

BRUXELLES, IMPRIMERIE DE M. HAYEZ.

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL,

PRÉCÉDÉ

DE LA CINÉMATIQUE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN,

ET

FONDÉ TOUT ENTIER SUR LES NOTIONS LES PLUS ÉLÉMENTAIRES DE LA GÉOMÉTRIE PLANE;

PAR

Ernest LAMARLE,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand. Membre-associé de l'Académie royale de Belgique.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1861.

AVERTISSEMENT.

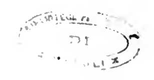
Le lecteur qui connaît la cinématique du point, de la droite et du plan, peut passer immédiatement à la deuxième partie de ce travail et aborder directement l'exposé du calcul différentiel. S'il concevait des doutes sur la légitimité des principes fondamentaux, pris pour point de départ, il devrait se reporter à la première partie et chercher les éclaircissements nécessaires soit au début, soit dans le chapitre VIII.

Le lecteur qui ne possède aucune notion de cinématique et qui veut abréger, peut se borner à l'étude du mouvement d'un point et d'une droite dans un plan. Les notions dont il a besoin pour aborder le calcul différentiel sont exposées dans les trois premiers chapitres, ou plus simplement encore dans les nos 34, 35, 36, 37 et 38 du chapitre VIII.

En général, on jugera préférable de s'appuyer uniquement sur les notions les plus élémentaires. En ce cas, il faut, dans la deuxième partie, passer du n° 9 aux nos 38, 39, 40, revenir au n° 12, et poursuivre en supprimant les nos 27, 28, 33, 34, 35 et 37. Cette façon de procéder est celle qui permet d'atteindre le but proposé le plus vite possible et le plus simplement; une première lecture, ainsi faite, offre l'avantage de mettre en plus grande évidence l'extrême facilité de

la méthode adoptée pour l'exposition du calcul différentiel. En lisant le tout, on voit mieux combien sont variées les ressources dont on dispose pour les différents cas d'application.

Les nos 33, 34 et 35 de la deuxième partie sont les seuls qui puissent offrir quelque difficulté ou du moins ralentir la marche. On ne perdra point de vue qu'on peut les supprimer en y suppléant par les nos 38 et 39.



INTRODUCTION [1].

La cinématique du point et de la droite se réduisant à un petit nombre de notions qui font partie de l'enseignement élémentaire, ou qu'on peut y introduire sans aucune difficulté, il nous a paru qu'il y aurait un grand avantage à ramener à ces notions si simples et toutes géométriques l'exposé complet du calcul différentiel et intégral.

Tel est l'objet que nous nous proposons dans le présent ouvrage.

La première partie comprend la cinématique du point, de la droite et du plan. Considérée en elle-même et détachée des autres parties, nous pensons qu'elle remplit les conditions voulues d'un traité élémentaire assez complet pour satisfaire à toutes les exigences. Considérée au point de vue plus restreint des principes qu'il s'agit d'établir comme base du calcul différentiel et intégral, elle pourrait se réduire à quelques lignes, où l'on définirait avec précision ce qu'on doit entendre par l'état de mouvement d'un point dans l'espace et par celui d'une droite dans un plan. En la développant comme nous l'avons fait; en détaillant dans les sept premiers chapitres une suite de propositions que les procédés suivis dans le chapitre VIII permettent d'exposer en quelques pages, et dont on peut d'ailleurs supprimer sans inconvénient le plus grand nombre, nous avons voulu prévenir les objections qu'on serait conduit à nous opposer et que les notions générale-

[1] Le lecteur est prié de lire cette introduction.

ment admises en cinématique ne suffiraient pas à résoudre sans quelque effort de la part du lecteur. Nous avons aussi voulu poser les fondements d'une théorie nouvelle, purement géométrique et offrant par elle-même toutes les ressources dont on a besoin pour certaines applications réservées jusqu'ici au domaine de l'analyse infinitésimale. C'est ainsi, par exemple, qu'en se fondant sur cette théorie et laissant à l'écart toute notion de calcul différentiel, toute intervention d'infiniment petits, tout recours à la méthode des limites, on peut aborder directement les questions relatives à la courbure des lignes et des surfaces.

Les développements donnés à cette partie de notre travail ont encore une autre utilité : c'est de fournir des moyens de solution variés et nombreux, susceptibles de se suppléer les uns les autres et de féconder le champ ouvert aux investigations. Toutefois, comme ils ne sont point nécessaires à l'exposé des règles établies dans la deuxième partie, ni même à la solution directe des questions qui concernent la courbure ou d'autres sujets analogues, le lecteur peut se tenir exclusivement aux premiers éléments de la cinématique. Lorsqu'on sait d'avance, d'une manière bien précise et bien nette, en quoi consistent la vitesse d'un point et l'état de mouvement d'une droite dans un plan, on peut passer outre sans s'arrêter à la première partie. Dans le cas contraire, il faut, avant tout, s'initier à ces deux notions fondamentales et se familiariser avec elles par l'étude des chapitres I, II, III, ou plus simplement encore des cinq premiers numéros du chapitre VIII. Cela fait, on est immédiatement à même de lire avec fruit l'exposé du calcul différentiel et d'en saisir toutes les conséquences.

L'idée de recourir à la cinématique pour fonder sur la géométrie l'analyse transcendante, n'est pas entièrement nouvelle. Déjà vers le milieu du dix-septième siècle, la cinématique du point fournissait à Roberval une méthode des tangentes non moins remarquable par son élégance que par sa simplicité. Quelque temps après, Newton s'appuyait sur cette même cinématique pour définir les fluxions, généralisant par cela seul la méthode de Roberval, créant du même coup le calcul différentiel tout entier, et ouvrant ainsi la voie parcourue successivement par plusieurs

géomètres, au nombre desquels nous citerons en particulier Maclaurin et Thomas Simpson. En s'arrêtant à la cinématique du point, comme l'ont fait nos devanciers, on laisse subsister un obstacle invincible à la construction d'une méthode purement rationnelle, entièrement dégagée de la considération des limites, et susceptible d'offrir les mêmes facilités que la méthode infinitésimale. Cet obstacle disparaît lorsqu'on fait intervenir la cinématique de la droite et que, prenant pour base notre conception relative à la courbe, on développe tout ce que renferme en soi la définition suivante :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment.

De là résulte une série d'applications qui nous ont permis d'étendre à la courbure des lignes et des surfaces ce qu'on avait fait pour les touchantes aux courbes, c'est-à-dire de créer, pour les contacts du second ordre et des ordres supérieurs, une théorie géométrique analogue à celle de Roberval pour les contacts du premier ordre. Telle est la puissance et la fécondité de cette théorie que, par elle, et sans autre secours que celui des notions les plus élémentaires, nous avons pu aborder et résoudre toutes les questions générales et particulières qui se rapportent à la courbure dans les traités de calcul différentiel et d'analyse infinitésimale. Nous croyons avoir fait quelque chose d'utile en mettant ainsi à la portée des commençants des questions qui semblaient leur être interdites, et, surtout, en leur offrant, comme moyens de solution, les procédés simples et rigoureux de la géométrie. Quoi qu'il en soit, une objection se présente : elle consiste en ce que la marche à suivre exige, en chaque cas, une définition géométrique, et, en outre, un certain effort d'invention pour tirer des données qu'on possède le parti convenable. En vain multiplie-t-on les exemples : tout cas nouveau se résout en un problème particulier de géométrie, et la construction cherchée ne s'offre pas toujours d'elle-même.

Le travail que nous publions aujourd'hui ne laisse rien sub-

sister de l'objection précédente : ce sont les règles mêmes du calcul différentiel et intégral qu'il dégage des éléments de la géométrie, réunissant ainsi aux ressources dont nous disposions déjà toutes les ressources connues de l'analyse transcendante.

On sait combien la simple définition d'une différentielle proprement dite présente en général de difficulté. Dans notre méthode, comme dans celle que Maclaurin a pris à tâche de développer, la définition de la différentielle peut se donner *à priori* sans offrir rien d'obscur ou de compliqué. Maclaurin débute par la remarque suivante :

« En général toutes les quantités *de même espèce* (lorsqu'on » considère seulement leur grandeur) peuvent être représentées » par des lignes droites qui sont supposées être toujours entre » elles en même raison que ces quantités. De même, dans cette » méthode, nous pourrons représenter les quantités *de même* » *espèce* par des lignes droites et les vitesses des mouvements qui » sont censés les produire par les vitesses des points qui se meu- » vent sur ces lignes droites [1]. »

Reprenons cette remarque en lui donnant toute l'extension qu'elle comporte, et supprimant ce qui la restreint ou l'embarrasse. Nous dirons :

Toute grandeur a pour équivalent numérique une portion de droite composée avec l'unité linéaire comme la grandeur donnée se compose avec son unité propre. Lorsque la grandeur donnée est incessamment variable, le point, qui limite la longueur substituée à cette grandeur comme équivalent numérique, glisse continûment sur la droite qu'il décrit. Cela posé, on a la définition suivante :

La différentielle d'une grandeur quelconque incessamment variable est la vitesse du point qui décrit le segment de droite substitué comme équivalent numérique à cette même grandeur [2].

En s'arrêtant à ce premier aperçu, on peut déjà pressentir une

[1] *Traité des fluxions de Maclaurin*, traduit par le R. P. Pezenas, page 7.

[2] Il est sous-entendu que ce segment de droite est limité à une extrémité par un point fixe, à l'autre par le point mobile que l'on considère.

certaine différence entre les deux méthodes que nous mettons ici en parallèle. Cette différence s'accuse de plus en plus à mesure qu'on avance dans les applications. Toutefois, c'est par le développement de l'idée mère renfermée dans notre définition de la courbe qu'elle se caractérise avec toute son importance. Maclaurin donne les définitions suivantes de la tangente en un point d'une courbe et de la courbure en ce même point :

« Une droite est tangente à une courbe, lorsqu'elle touche la » courbe si exactement qu'on ne peut mener aucune droite par le » point d'attouchement entre elle et la courbe [1]. »

« Comme de toutes les droites que l'on peut mener par un » point d'un arc, celle-là seule est tangente qui le touche si pré- » cisément qu'on ne peut pas mener une autre droite entre elle » et cet arc; ainsi de tous les cercles qui touchent une courbe » dans un point donné, celui-là est dit avoir la même courbure » que cet arc, lequel le touche si exactement qu'on ne peut dé- » crire aucun cercle entre eux par le point d'attouchement, tous » les autres cercles passant en dessus ou en dessous [2]. »

C'est d'ailleurs en s'appuyant sur ces définitions que Maclaurin procède pour déterminer la tangente et le cercle de courbure, autrement dit le cercle osculateur.

Les définitions que nous venons de rappeler accusent certaines propriétés caractéristiques de la tangente et du cercle osculateur. Elles ne font point connaître le rapport qui s'établit entre ces lignes et la courbe dans leur génération simultanée. Pour nous, qui désignons sous le nom de *directrice* la droite mobile mentionnée dans notre définition de la courbe, *la tangente est la directrice du point décrivant*, c'est-à-dire *la droite suivant laquelle est dirigée la vitesse de ce point; la courbure est celle du cercle où subsiste, d'une manière constante, le rapport établi entre la vitesse actuelle du point décrivant et la vitesse angulaire simultanée de la directrice.* Que la vitesse du point décrivant conserve, à partir d'un instant quelconque, la direction qu'elle affecte à ce

[1] *Traité des fluxions de Maclaurin*, traduit par le R. P. Pezenas, p. 120.
[2] *Ibidem*, p. 240.

même instant; le point décrivant cesse de décrire la courbe pour décrire la tangente. Que le point décrivant et la directrice de ce point persistent tous deux, l'un à glisser sur la directrice, l'autre à tourner autour du point décrivant, comme ils le font à un instant quelconque déterminé; à partir de ce même instant, le point décrivant cesse de décrire la courbe pour décrire le cercle osculateur. En chaque point d'une courbe, il y a sur la courbe direction et courbure: le cercle osculateur est le type sensible de la courbure, comme la tangente l'est de la direction.

On observera que nos définitions ont un caractère particulier. Elles pénètrent au fond même des choses; elles expriment et manifestent les lois qui président à la génération des grandeurs, dont on étudie la variation simultanée. Il suit de là qu'elles doivent nécessairement offrir des moyens nouveaux de recherche et de solution. L'exposé du calcul différentiel et intégral fera ressortir les avantages qu'elles présentent en se systématisant de manière à constituer une méthode générale. Bornons-nous ici à en donner une idée par une application tout élémentaire.

Représentons-nous une courbe plane et le point qui la décrit. Soit v la vitesse de ce point et w celle de la directrice à un même instant quelconque déterminé. Considérons la normale à la courbe décrite, et supposons qu'entraînée par le point décrivant, elle glisse avec ce point le long de la directrice et en lui restant perpendiculaire. Il est visible qu'en se déplaçant ainsi, la normale glisse tout entière avec la vitesse v parallèle à la directrice, et qu'en même temps, elle tourne autour du point décrivant avec la vitesse w. De là résultent pour le point o, situé sur la normale à la distance R du point décrivant, deux vitesses actuelles et simultanées, l'une égale à v, l'autre au produit Rw. Ces deux vitesses ont une même direction perpendiculaire à la normale; elles sont d'ailleurs de même sens ou de sens contraire, selon que l'arc décrit, à partir de l'instant considéré, commence par être convexe ou concave du côté du point o. Supposons le point o pris du côté de la concavité. Dans cette hypothèse, la vitesse du point o est représentée en grandeur par la différence $v - Rw$.

Considérons en particulier ce qui arrive pour le point o, lors-

qu'au lieu de rester quelconque il est déterminé par l'équation de condition

$$R = \frac{v}{w}.$$

En ce cas, l'on a évidemment

$$v - Rw = 0.$$

De là résultent les conséquences suivantes :

1° *Lorsque le point décrivant entraîne avec lui la normale à la ligne décrite, il est un point de la normale dont la vitesse est nulle. Ce point est situé du côté de la concavité, à une distance du point décrivant exprimée pour chaque position de la normale par la valeur correspondante du rapport* $\frac{V}{W}$.

2° *Deux cas sont possibles, selon que le rapport* $\frac{V}{W}$ *demeure invariable sur la courbe décrite ou qu'au contraire, il varie incessamment d'un point à un autre.*

Dans le premier cas, le point de la normale dont la vitesse est nulle reste toujours le même. Il s'ensuit qu'il est fixe et que la ligne décrite est une circonférence de cercle ayant son centre en ce point.

Dans le second cas, le point de la normale, dont la vitesse est nulle, est le centre du cercle qui se substituerait à la courbe décrite, si l'on conservait au rapport $\frac{V}{W}$ *la valeur qu'il affecte à l'instant que l'on considère. Ce cercle prend, par rapport à la courbe, le nom de cercle osculateur. Son rayon est dit rayon de courbure. En désignant par* ρ *ce rayon, on a généralement*

$$\rho = \frac{v}{w}.$$

Soit *m* une position quelconque du point qui décrit la courbe donnée; *o* le centre de courbure correspondant à cette position; *m'* un point mobile assujetti à glisser sur la normale de manière à coïncider toujours avec le centre *o* du cercle osculateur.

Le rayon ρ étant, par hypothèse, incessamment variable, il s'ensuit que, dans le passage d'une position quelconque de la nor-

male aux positions suivantes, le point m' s'écarte ou se rapproche du point m en glissant sur la normale avec une certaine vitesse. Soit u cette vitesse : elle est déterminée par la variation correspondante du rapport $\frac{v}{w}$, c'est-à-dire par le degré de rapidité avec lequel ce rapport augmente ou diminue. Nous savons d'ailleurs qu'elle constitue à elle seule la vitesse totale du point m'.

Affectons à la courbe donnée le nom de *développante* et au lieu géométrique de ses centres de courbure, celui de *développée*. Les considérations qui précèdent ont pour conséquences immédiates les déductions suivantes :

3° *Pendant que le point* m *décrit la développante, le point* m' *décrit la développée.*

4° *Dans la description de la développée, le point* m' *glisse sur la normale* mm' *avec la vitesse* u, *et, en même temps, la normale tourne autour de ce point avec la vitesse* w.

5° *Toute normale à la développante est tangente à la développée, et réciproquement toute tangente à la développée est normale à la développante.*

6° *Dans le passage d'une position à une autre, la normale à la développante s'applique sur la développée par voie d'enroulement continu.*

7° *L'arc de la développée compris entre deux rayons de courbure de la développante a pour longueur rectifiée la différence de ces mêmes rayons.*

8° *Le rayon de courbure de la développée est représenté pour le point* m' *par le rapport* $\frac{u}{w}$, *en même temps que celui de la développante l'est pour le point* m *par le rapport* $\frac{v}{w}$.

9° *Lorsque les vitesses* u *et* w *varient dans un rapport constant, la développée est une circonférence de cercle.*

10° *Les développantes de cercle sont les seules lignes pour lesquelles les vitesses* u *et* w *conservent entre elles un rapport invariable.*

S'agit-il maintenant de déterminer les propriétés et les caractères distinctifs du cercle osculateur? S'agit-il, en outre, d'établir les conditions relatives aux contacts des ordres supérieurs? On

peut y parvenir, comme nous l'avons fait [1], en s'appuyant sur les premiers éléments de la géométrie. On y parvient plus directement encore, en observant que, pour une même vitesse du point décrivant, l'écart entre la tangente et la courbe augmente nécessairement avec la vitesse angulaire de la directrice. De là se déduit sans la moindre difficulté toute une série de conséquences. Énonçons-en les principales, en désignant par *m* le lieu de départ du point décrivant et par *s* l'arc décrit à partir de ce lieu. Voici d'abord un premier énoncé :

Le cercle osculateur est, parmi tous les cercles passant par le point m, *celui qui se rapproche le plus de l'arc* s *dans le voisinage du point* m. *Il est la limite séparative des cercles qui touchent l'arc* s *en* m, *les uns intérieurement, les autres extérieurement. En général, il coupe la courbe au point d'osculation.*

Lorsque deux courbes ont en un point commun même tangente, elles se touchent en ce point et leur contact est du premier ordre. Si, en outre, elles ont même courbure, leur contact, devenu plus intime, est dit du deuxième ordre. Soit *o* le centre commun de courbure qui correspond au contact du deuxième ordre établi, par hypothèse, entre les deux courbes que l'on considère :

Les développées de ces courbes se touchent au point o *et leur contact est du premier ordre.*

Supposons, sans rien changer d'ailleurs, que le contact des développées soit du deuxième ordre, celui des développantes, devenu plus intime, sera du troisième ordre, et ainsi de suite, tout contact de l'ordre n entre les développées impliquant un contact de l'ordre $n + 1$ entre les développantes, et, réciproquement, tout contact de l'ordre $n + 1$ entre les développantes impliquant un contact de l'ordre n entre les développées. On voit ainsi comment le contact du troisième ordre se définit au moyen du contact du deuxième ordre, celui du quatrième au moyen du troisième, et ainsi de suite indéfiniment. Cela posé, il n'est pas besoin d'autres

[1] Voir notre *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure* (2[me] note additionnelle).

procédés que ceux de la géométrie élémentaire pour établir les déductions suivantes :

Lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'un ordre quelconque supérieur au premier, selon que leurs courbures sont toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes à partir du point de contact et d'un même côté de la tangente, la position relative des développées est l'inverse ou la même que celle des développantes.

En général, lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'ordre pair, elles se coupent au point d'osculation.

En général, lorsque deux courbes ont un contact d'ordre impair, elles ne se coupent pas au point où elles se touchent.

Entre deux courbes dont le contact est de l'ordre n, *on n'en peut mener aucune ayant un contact d'ordre inférieur.*

Cet aperçu indique suffisamment ce qu'il y a de neuf dans la méthode que nous nous proposons ici de généraliser. Il montre, en même temps, comment cette méthode a ses procédés particuliers, essentiellement distincts des procédés ordinaires. L'exposé du calcul différentiel fera voir l'extension que comporte cette même méthode et comment elle embrasse tous les cas possibles d'application, c'est-à-dire comment elle se systématise en dégageant de la géométrie les règles dont on a besoin pour résoudre, ainsi qu'on le fait par d'autres méthodes, toutes les questions qui peuvent se présenter. L'avantage consiste en ce que tout repose sur des notions rationnelles, purement élémentaires, offrant un sens précis, faciles à saisir dès le début, et supprimant ainsi toute obscurité. Il consiste également en ce que les moyens directs dont on dispose présentent, en général, de grandes facilités et qu'en outre, ils comprennent implicitement tous ceux dont l'emploi peut, en certains cas, paraître préférable.

Nous avons dit plus haut de quoi se compose la première partie de cet ouvrage et les simplifications qu'on y peut introduire. La deuxième partie comprend les règles générales de la différentiation, et, pour les cas les plus simples, les règles correspondantes de l'intégration. Elle se distingue des écrits publiés sur la même matière en ce qu'elle n'emprunte le secours d'aucune des mé-

thodes connues et que tout se réduit à des constructions purement géométriques. Rapprochée du travail que nous avons produit antérieurement sur le *postulatum d'Euclide*, elle montre, ainsi que nous l'annoncions, comment en mathématiques élémentaires, de même qu'en analyse transcendante, tout se ramène à une seule et même conception fondamentale.

Les lecteurs au courant des difficultés métaphysiques soulevées par l'analyse transcendante seront surpris sans doute de nous voir affirmer que nous n'avons besoin ni des infiniment petits, ni du procédé des limites, ni d'aucune notion d'algèbre supérieure pour établir *à priori* les règles de cette analyse et les rendre applicables à tous les cas. On reconnaîtra que cette affirmation n'a rien d'exagéré. Nous aurions pu combiner avec les moyens propres à notre méthode, ceux que fournit la méthode des limites et que nous étions en droit de nous approprier après les avoir déduits du théorème fondamental exposé n° 6. Nous le pouvions d'autant plus que tout étant éclairci dès l'abord, les résultats obtenus par la méthode des limites ne se réduisaient pas à la simple traduction d'une série de faits que l'on n'explique point, dont le sens échappe et qui restent en partie stériles. Nous avons préféré procéder exclusivement par la géométrie, de manière à ne laisser aucun doute sur l'indépendance absolue qui existe entre notre méthode et les autres.

La marche suivie dans les cinq premiers chapitres peut être simplifiée d'après les indications du chapitre VI et notamment des numéros 38, 39 et 40. En se reportant à l'avertissement placé en tête de cet ouvrage, on verra comment on doit en faire la lecture pour parvenir au but proposé dans les conditions les plus promptes et les plus faciles.

Il nous a paru curieux de démontrer *à priori* que le plan tangent en un point d'une surface contient, en général, toutes les tangentes menées par ce point, et que deux tangentes réciproques, qui sortent avec une égale vitesse des sections qui les déterminent, ont des rotations égales et contraires autour des directions suivies par leurs points de contact. Le premier de ces théorèmes implique, comme conséquence, la loi générale de la différentiation des fonctions composées ou complexes, et réciproquement. Le dernier exprime l'égalité qui subsiste entre les résultats de plusieurs déri-

vations successives où l'ordre seul a été changé : ici d'ailleurs, comme dans le premier cas, il y a réciprocité complète. Cette équivalence entre deux faits purement géométriques et les faits similaires qui leur correspondent en analyse différentielle offre, pensons-nous, un certain intérêt.

Lorsqu'on veut établir directement et de prime abord, ainsi que nous l'avons fait aux numéros 33 et 34, les propriétés des tangentes réciproques, on ralentit la marche des déductions, et on leur ôte, en partie, la simplicité qu'elles comportent. Le mérite d'une difficulté vaincue nous a paru devoir être compté pour quelque chose, alors qu'il ne s'agissait pas seulement d'arriver au but, mais bien aussi de faire ressortir la puissance et la multiplicité des ressources dont nous disposons. Que ce soit, au besoin, notre excuse. L'inconvénient signalé n'existe d'ailleurs qu'en apparence : il disparaît, lorsqu'on passe du n° 9 aux n°s 38, 39, 40 et que, revenant au n° 12, on poursuit, en supprimant les n°s 27, 28, 33, 34, 35 et 37. De là résulte une simplification considérable : les figures planes et leurs mouvements dans un plan étant les seuls qu'on ait à considérer, il suffit des premiers éléments de géométrie et de cinématique pour établir toutes les règles de la différentiation et procéder ensuite aux applications ultérieures.

Les développements que comportent le calcul différentiel et intégral sont faciles à déduire des principes exposés dans la deuxième partie de cet ouvrage. Pour s'en convaincre à l'avance, il suffit d'observer que la méthode fondée sur ces principes rend toutes les autres immédiatement accessibles et qu'en outre, elle a ses moyens particuliers, généralement très-prompts, très-directs et très-simples. Quoi qu'il en soit, nous croyons devoir poursuivre la tâche que nous avons entreprise et nous efforcer de la mener à bonne fin en la complétant. Déjà le plus difficile est fait : déjà tout est compris implicitement dans le travail que nous publions aujourd'hui. Les parties suivantes auront pour objet les applications analytiques et géométriques du calcul différentiel et intégral : elles feront, pensons-nous, ressortir mieux encore les avantages de notre méthode.

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CINÉMATIQUE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE Ier.

DES DÉPLACEMENTS RECTILIGNES ET SIMULTANÉS DE PLUSIEURS POINTS.

Définition et mesure des vitesses.

1. Considérons un point supposé mobile sur une droite[1] et y occupant une position quelconque déterminée. Lorsque ce point sort de cette position, c'est suivant la direction de la droite et avec un certain degré de rapidité. De là résulte pour le point mobile

[1] Cette droite est supposée fixe. On verra plus loin comment la définition de la vitesse donnée pour le cas d'un point qui se meut sur une droite fixe s'étend d'elle-même au cas où il y a mouvement du point et de la droite, *le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux simultanément.*

un état particulier, distinct de l'état de repos. Cet état d'un point qui sort de la position qu'il occupe est dit *état de mouvement.* On le désigne plus simplement encore sous le nom de *vitesse.*

Dans la vitesse ainsi définie, il y a deux choses à distinguer : l'une est la direction, l'autre la grandeur. La direction est déterminée par la droite sur laquelle le point est assujetti à se déplacer; elle comporte deux sens opposés l'un à l'autre. La grandeur est le degré de rapidité avec lequel le déplacement commence à partir de la position considérée.

Étant donnée une position quelconque du point mobile et la vitesse avec laquelle le point sort de cette position, on peut toujours concevoir que le déplacement continue comme il commence, c'est-à-dire sans que la vitesse initiale cesse de conserver, partout et toujours, une seule et même direction, un seul et même sens, une seule et même grandeur. Quelle que soit la vitesse ainsi déterminée, par cela seul qu'elle est invariable, le déplacement du point mobile s'accomplit avec *uniformité,* c'est-à-dire suivant un mode unique, partout et toujours identiquement le même. Réciproquement, s'il s'agit d'un point qui se déplace *uniformément,* la vitesse de ce point conserve partout et toujours une seule et même détermination.

Imaginons que sur la droite à décrire on ait tracé des divisions *quelconques,* toutes égales en longueur. Par hypothèse, la vitesse est *constante :* il y a donc *uniformité,* et de même que le point décrit d'abord la première division, de même ensuite il décrit chacune des autres, dans des conditions toujours identiques. Au lieu d'un seul point décrivant, considérons à la fois deux points animés chacun d'une vitesse constante. Pendant que le premier point décrit une longueur *l,* choisie comme on voudra, le second point décrit une longueur correspondante *l'.* De même aussi, pendant que le premier point décrit *un multiple quelconque* de la longueur *l,* le second point décrit *le même multiple* de la longueur *l'.* On déduit aisément de là que si l'on prend deux longueurs *quelconques* décrites *simultanément* de part et d'autre, ces longueurs conservent entre elles un rapport *invariable.* On voit d'ailleurs que les longueurs décrites croissent avec les vitesses des points

décrivants, et l'on est conduit naturellement à prendre les unes pour mesures des autres.

Soit A_0, A_1, A_2 . . . A_n une suite de droites toutes superposées dans l'ordre des lettres qui les désignent respectivement. Concevons que la droite A_0 soit fixe, et que chacune des autres, *entraînant avec elle toutes celles qui lui sont superposées*, glisse sur la précédente avec la vitesse v. La vitesse de la droite A_1 sera v; celle de la droite A_2, $v + v$ ou $2v$; celle de la droite A_3, $2v + v$ ou $3v$, et ainsi de suite, celle de la droite A_n étant représentée par nv. D'un autre côté, tandis qu'un point de la droite A_1 décrit une longueur quelconque l, les longueurs décrites par chaque point des droites A_2, A_3 . . . A_n sont respectivement $2l$, $3l$, . . . nl. Il suit de là que les vitesses des points situés sur les droites A_1, A_2 . . . A_n, sont entre elles comme les longueurs que ces points décrivent simultanément. On voit donc que si par vitesse double, triple, quadruple, etc., on entend la vitesse qui résulte pour un même point de la composition de plusieurs vitesses simultanées, toutes égales et prises au nombre de deux, trois, quatre, etc., il est rigoureusement exact de substituer au rapport des vitesses que l'on compare entre elles, les rapports des longueurs décrites simultanément par les points qu'elles animent.

De là résultent, en ce qui concerne les grandeurs respectives des vitesses simultanées qui animent en même temps un ou plusieurs points, les conséquences suivantes :

1° *Lorsque plusieurs vitesses simultanées animent un même point, suivant une même droite, la vitesse résultante est la somme algébrique des vitesses composantes.*

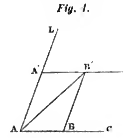
2° *Dans la comparaison de plusieurs vitesses, chaque vitesse peut être exprimée par une longueur.*

3° *Les vitesses que l'on compare animant certains points, les longueurs qui les expriment sont les portions de droite que ces points décriraient simultanément, si chaque vitesse demeurait constante.*

4° *En général, on est libre de fixer, comme on veut, la portion de droite prise pour mesure de l'une des vitesses qui sont à comparer; les autres s'en déduisent.*

Composition et décomposition des vitesses.

2. Soit une droite AC, m un point décrivant cette droite à partir du point A; u la vitesse avec laquelle le point m se déplace sur la droite AC. Au lieu d'être fixe, la droite AC peut être mobile, et, par exemple, glisser, *sans tourner*, le long de la droite AL. Dans ce glissement de la droite AC une seule et même vitesse anime, en même temps, tous ses points; c'est la vitesse du point A, vitesse dirigée suivant AL et que nous désignerons par u'.



Lorsque le point A de la droite AC parvient en A' sur la droite AL, la droite AC occupe la position A'C' parallèle à AC. Le point m est alors en B', A'B' étant la longueur qu'il décrit sur AC, pendant que le point A décrit sur AL la longueur AA'.

Les longueurs A'B', AA' étant décrites simultanément, l'une par le point m en vertu de la vitesse constante u, l'autre par le point A en vertu de la vitesse constante u', on a, conformément à ce qui précède,

$$\frac{A'B'}{AA'} = \frac{u}{u'} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Cette relation fixe d'une manière invariable la position de la droite AB' dirigée suivant la diagonale du parallélogramme AA'B'B. Elle montre, en outre, qu'il existe un rapport constant entre la longueur de cette diagonale et celle de chacun des côtés qui lui correspondent.

De là résultent les conséquences suivantes :

1° *Le point* m *peut être considéré comme animé de deux vitesses simultanées, l'une égale à* u *et parallèle à* AC, *l'autre égale à* u' *et parallèle à* AL.

2° *En vertu de ces deux vitesses simultanées, supposées con-*

stantes, le point m *décrit la diagonale* AB' *avec une vitesse constante* v, *déterminée par la relation*

$$\frac{v}{AB'} = \frac{u}{A'B'} = \frac{u'}{AA'}.$$

Supposons que l'une des trois longueurs AB', A'B', AA' soit prise pour mesure de la vitesse qui lui correspond ; la même condition s'applique en même temps à chacune des deux autres. Ce résultat est connu sous le nom de *parallélogramme des vitesses.* On peut l'énoncer, comme il suit, sous forme de règle générale :

1re RÈGLE. — *Le point* m *étant animé de deux vitesses actuelles et simultanées, représentées en direction, sens et grandeur par les portions de droites* ma, mb, *la vitesse résultante est représentée en direction, sens et grandeur par la diagonale* mn *du parallélogramme* manb *construit sur les côtés* ma, mb.

Fig. 2.

La réciproque est d'ailleurs évidente. On peut donc dire aussi comme règle générale :

2me RÈGLE. — *Étant donnée la droite* mn *qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse actuelle du point* m, *si sur cette droite, prise pour diagonale, on construit un parallélogramme quelconque* manb, *la vitesse du point* m *peut être considérée comme résultant de deux vitesses simultanées, représentées en direction, sens et grandeur, par les côtés* ma, mb.

De là résulte encore cette autre règle :

3me RÈGLE. — *Étant données l'une des deux composantes de la vitesse d'un point, et la direction de l'autre composante, si l'on trace à partir du point la composante connue et que, par son extrémité, l'on mène une parallèle à l'autre composante, l'extrémité de la résultante est située sur cette parallèle.*

Le point *m* pouvant être considéré comme décrivant la droite

AB′, on observera que les vitesses u, u' sont en même temps, d'une part, les composantes de la vitesse v suivant les directions AC, AL, d'autre part, les vitesses des projections du point m sur deux axes coordonnés parallèles à ces directions [1].

DU DÉPLACEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE.

Détermination de la vitesse.

3. Considérons un point sortant de la position qu'il occupe : ce point est animé d'une certaine vitesse. Ainsi que toutes les gran-

[1] On reconnaît aisément que les résultats du n° 2 s'appliquent à tout mouvement simultané d'un point sur une droite et de la projection de ce point sur une autre droite, les lignes projetantes étant toutes parallèles à un même plan.

Soit m le point mobile, AB la droite qu'il décrit, P un plan de direction constante passant par le point m, D une droite fixe, p le point où le plan P coupe la droite D.

Fig. 3.

Prenons sur la droite AB un point quelconque A, et par ce point, menons la droite AC parallèle à la droite D. n étant le point où le plan P coupe la droite AC, il est aisé de voir que la droite mn est de direction constante et que le point n se meut sur AC, comme le point p se meut sur la droite D. On peut donc substituer le point n au point p : le mouvement de l'un sera le mouvement de l'autre.

La droite mn étant de direction constante, rien n'empêche qu'on n'assujettisse, en outre, le point n à conserver sur cette droite une seule et même position. Dès lors le mouvement de la droite mn est complétement déterminé par celui du point m. Il en résulte :

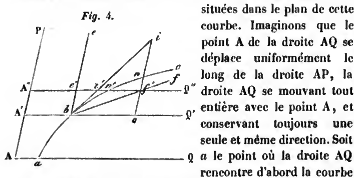
1° Que le mouvement du point n sur AC est complétement déterminé par le mouvement du point m sur AB ;

2° Qu'à un seul et même état de mouvement du point m sur AB correspond un seul et même état de mouvement du point n sur AC.

Cela posé, v étant la vitesse actuelle du point m sur AB, il n'importe en rien que cette vitesse soit constante ou bien incessamment variable. Dans un cas comme dans l'autre, il ne peut jamais y avoir, pour la vitesse actuelle et simultanée du point n sur AC, qu'une seule et même détermination, celle qui correspond à la vitesse v supposée constante.

deurs mathématiques, cette vitesse peut être constante ou bien incessamment variable. Dans tous les cas, elle est à chaque instant complétement déterminée. Lorsqu'elle varie et qu'on veut exprimer ce qu'elle est pour une position donnée du point mobile, on considère exclusivement la détermination particulière qui correspond à la position donnée. *On suppose qu'à partir de cette position, la vitesse demeure invariable, et l'on procède comme si elle l'était effectivement.* Par ce simple artifice, le cas des vitesses variables se ramène au cas des vitesses constantes, et les règles établies pour celui-ci s'appliquent à celui-là.

Soit *abc* une courbe plane et AP, AQ deux droites quelconques situées dans le plan de cette courbe. Imaginons que le point A de la droite AQ se déplace uniformément le long de la droite AP, la droite AQ se mouvant tout entière avec le point A, et conservant toujours une seule et même direction. Soit *a* le point où la droite AQ rencontre d'abord la courbe *abc*. Concevons un point *m* mobile sur la droite AQ et s'y déplaçant à partir du point *a* de manière à occuper sans cesse la position précise où la droite AQ coupe la courbe *abc*. Cela revient à dire que le point *m* décrit tout à la fois la droite mobile AQ et la courbe fixe *abc*.



Soit *u* la vitesse du point A sur la droite fixe AP et *u'* celle du point *m* sur la droite mobile AQ. Par hypothèse, la vitesse *u* est constante : si la vitesse *u'* l'était, en même temps, pour une portion quelconque de la droite AQ, il s'ensuivrait que la ligne, décrite par le point *m* dans le plan PAQ, serait droite sur toute l'étendue correspondante à cette portion. Or la ligne décrite est la ligne *abc*, supposée courbe dans toutes ses parties, la vitesse *u'* est donc incessamment variable [1].

[1] Toute variation incessante est nécessairement continue. Cela ne veut point dire que la vitesse *u'* ne peut subir aucun changement brusque sur toute

Considérons la droite AQ dans une position quelconque A'Q'. Le point *m* est alors en *b* et les vitesses qui l'animent simultanément sont l'une *u*, l'autre *u'*. Construisons d'après la règle du parallélogramme, la résultante *v* des vitesses actuelles *u*, *u'*. La composante *u* est constante en grandeur ainsi qu'en direction; la composante *u'* est aussi constante en direction, mais sa grandeur varie sans cesse à partir du point *b*, au delà comme en deçà. La conséquence est qu'à partir du point *b*, au delà comme en deçà, la vitesse *v* a une direction incessamment variable.

Soit *n* un point pris sur la courbe *abc*, à proximité du point *b*. Projetons ce point sur A'Q' par une droite *no* parallèle à PA. Les longueurs *bn*, *bo* se correspondent, étant toutes deux décrites simultanément par le point *m*, l'une sur la courbe fixe *abc*, l'autre sur la droite mobile AQ. Supposons la longueur *bn* suffisamment petite : dès lors nous pouvons admettre que la grandeur *u'* varie continûment de *b* en o, et qu'en outre, elle est constamment croissante ou constamment décroissante dans toute l'étendue de cet intervalle. Admettons que de *b* en o, la grandeur *u'* soit constamment croissante : il en résulte que de *b* en *n* l'angle de la droite A'Q' avec la vitesse *v* décroît continûment. Soient *bi*, *bf*, les directions de la vitesse *v*, l'une en *b*, l'autre en *n* : si la grandeur

l'étendue de la courbe *abc*. Cela veut dire que, s'il y a des changements brusques, ils se succèdent à certains intervalles, pendant chacun desquels la continuité subsiste sans interruption.

Cette observation ne s'applique pas seulement à la grandeur de la vitesse *u'*. Elle s'applique en même temps à la direction de la vitesse du point *m* sur la courbe *abc*. On voit d'ailleurs que cette grandeur et cette direction dépendent l'une de l'autre, et qu'à cet égard, elles varient toutes deux dans les mêmes conditions.

En résumé, l'on peut et l'on doit poser comme *axiome* le principe suivant, qui, s'il n'est pas toujours exprimé, est au moins toujours sous-entendu :

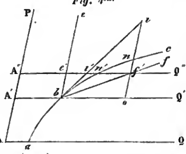
Toute variation, supposée incessante et ayant une origine quelconque déterminée, est nécessairement continue sur une étendue plus ou moins grande, comptée à partir de cette origine.

Ce principe ne saurait être contesté, par cela seul que toute hypothèse contraire est un non-sens impliquant absurdité et contradiction.

u' demeurait constante sur la longueur bo, selon qu'elle affecterait la valeur qui correspond au point b, ou celle qui correspond au point o, le point m décrirait la droite bi ou la droite bf. En réalité la grandeur u' croît continûment de b en o, et, en même temps l'angle de la vitesse v avec la droite A'Q' décroît continûment depuis la valeur obi jusqu'à la valeur obf. La ligne décrite par le point m de b en n est donc nécessairement comprise entre les droites bi, bf (*). Cela posé, imaginons que le point n et sa projection o se rapprochent indéfiniment du point b. Dans cette hypothèse, la droite bf tourne autour du point b et se rapproche indéfiniment de la droite bi : rien ne change d'ailleurs; il y a donc

(*) Pour ne laisser aucun doute sur cette déduction, nous allons la démontrer avec une entière rigueur.

Par le point b menons une droite be parallèle à PA et considérons le mouvement du point m, à partir du point b, sur l'arc bn' égal à bn ou plus petit.



Soient e', i', n', f' les points de rencontre des lignes be, bi, bn, bf avec une même droite A''Q'' parallèle à AQ. Soient en même temps u'_b, et u'_o les valeurs de la vitesse u' aux points b et o.

Tandis que la droite AQ se transporte de A'Q' en A''Q'', le point m décrit sur cette droite la longueur $e'n'$. La vitesse qui anime le point m pendant cette description et suivant cette droite, commence par être égale à u'_b : elle est d'ailleurs constamment croissante et toujours inférieure à u'_o; si cette vitesse, au lieu de varier comme elle le fait, demeurait constante, selon qu'elle serait égale à u'_b ou à u'_o, la longueur décrite par le point m sur la droite AQ serait moindre ou plus grande qu'elle l'est effectivement. Or, dans le premier cas, cette longueur serait $e'i'$, et dans le second $e'f'$. On a donc nécessairement, d'une part,

$$e'n' > e'i'$$

et, d'autre part,

$$e'n' < e'f'$$

La conséquence évidente est que l'arc bn' est tout entier compris entre les deux droites bi, bf. C. Q. F. D.

toujours, à partir du point *b*, une portion de l'arc *bc* comprise entre la droite fixe *bi* et la droite mobile *bf*.

Nous venons de voir que la droite *bf* peut se rapprocher indéfiniment de la droite *bi*, sans que ces deux droites cessent de comprendre entre elles une portion de l'arc *bc*. Cela revient à dire qu'aucune portion de droite ne peut, à partir du point *b*, rester comprise entre la droite *bi* et l'arc *bn*. Il s'ensuit que la droite *bi* est, de toutes les droites passant par le point *b*, celle qui se rapproche le plus de l'arc *bn*, dans le voisinage de ce point. La droite *bi*, *ainsi déterminée*, est nécessairement unique : on la distingue de toutes les droites passant par le point *b* en la désignant sous le nom de *tangente* ou sous le nom de *directrice*, selon qu'on la considère par rapport à la courbe décrite, ou par rapport au point décrivant.

Nous avons supposé la vitesse *u'* continûment croissante de *b* en o. La démonstration se ferait de la même manière, si, de *b* en *o*, la vitesse *u'* était constamment décroissante. La seule différence consisterait en ce qu'au lieu de s'abaisser au-dessous de la droite *bi*, l'arc *bn* et la droite *bf* s'élèveraient au-dessus.

Concluons que, *dans la description d'une courbe par un point, la vitesse de ce point a une direction incessamment variable.* Concluons, en outre, que *cette direction est, pour chaque position du point décrivant, celle de la tangente à la courbe décrite* [1].

4. La vitesse *u* peut être quelconque, constante ou variable. Dans tous les cas, la démonstration du n° 3 se fait de la même manière, et l'on voit aisément que la résultante des vitesses *u*, *u'* est

[1] Les considérations qui précèdent suffisent pour établir la méthode des tangentes créée par Roberval, et exposée, comme il suit, dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1690.

Principe. — « La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne » courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point. »

Règle générale. — « Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui » vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la » décrit, à l'endroit où vous voulez mener la touchante. De tous ces mouve- » ments, composez-en un seul : tirez la ligne de direction du mouvement » composé ; vous aurez la touchante de la ligne courbe. »

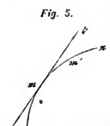
Ce principe et cette règle donnent, dans la plupart des cas, le moyen de

toujours dirigée suivant une même droite, *la droite la plus rapprochée de la courbe au point que l'on considère.* De là résulte le principe suivant :

On peut attribuer indifféremment une valeur quelconque soit à la vitesse v, *soit à l'une ou l'autre des deux composantes* u, u' : *les rapports que ces vitesses ont entre elles restent toujours les mêmes en un même point.*

Détachons de la courbe *abc* l'arc *bn*, et considérons-le séparément; *m* étant un point quelconque de cet arc, soit *smt* la tangente en ce point. Eu égard aux conditions qui subsistent sur toute l'étendue de l'arc *bn*, la démonstration du n° 3 implique les conséquences suivantes :

Fig. 5.



1° *L'arc* bn *est tout entier d'un seul et même côté de la tangente* smt, *en deçà comme au delà du point* m.

2° *De toutes les droites passant par le point* m, *la tangente* smt *est la seule qui ne coupe pas l'arc* bn *en ce point.*

3° *Les distances des différents points des arcs* mb, mn *à la tangente* smt *vont en croissant à mesure que ces points s'éloignent du point* m.

4° *Lorsque le point* m *se déplace en glissant de* b *en* n *sur l'arc* bn, *la tangente* smt *tourne continûment dans un seul et même sens.*

réduire à une simple opération graphique la détermination de la tangente en un point quelconque d'une courbe définie géométriquement. Pour aller au delà : pour pénétrer plus avant dans la nature intime de la ligne courbe : pour apprécier, définir et mesurer la courbure proprement dite, il faut d'abord introduire un principe nouveau ; il faut ensuite considérer avec quelques détails les conditions relatives à la rotation d'une droite dans un plan. Les développements qui suivent fournissent, à cet égard, tous les éclaircissements nécessaires. Non moins simples que l'énoncé de Roberval, ils comportent une extension beaucoup plus grande. C'est ainsi, par exemple, qu'ils permettent d'établir, comme nous l'avons fait ailleurs, une théorie purement géométrique de la courbure des lignes et des surfaces.

Concevons une droite D, assujettie à s'appuyer en un point de l'arc *bn* et à tourner, sans glisser, autour de ce point, jusqu'à ce que venant à s'appuyer sur un autre point du même arc, elle prenne cet autre point pour centre de rotation, et ainsi de suite indéfiniment.

Supposons la droite D dirigée suivant la tangente *smt* et tournant de gauche à droite. Je dis que le centre de rotation, situé d'abord en *m*, glisse continûment le long de l'arc *mn*.

La rotation commencée autour du point *m*, à partir de la position *smt*, ne peut pas continuer autour de ce même point. Cela résulte évidemment de ce qu'aucune droite, menée par le point *m*, ne peut rester comprise entre l'arc *mn* et la tangente *smt*. D'un autre côté, on ne saurait admettre que le centre de rotation se transporte *brusquement* du point *m* en un point *m'* séparé du point *m* par un intervalle quelconque déterminé. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'il n'y eût aucun écart entre le point *m'* et la tangente *smt*. Le contraire ayant lieu pour tout point *m'* séparé du point *m*, on voit que le déplacement du centre de rotation sur l'arc *mn* et sur la droite D est nécessairement continu.

Nous venons d'établir qu'au sortir de la position *smt*, la droite mobile ne peut s'appuyer sur aucun point *m'* séparé du point *m* par un intervalle quelconque déterminé. Il en résulte que le centre de rotation qui succède au point *m*, se rattache continûment à ce point, et qu'au delà de ce centre, comme en deçà [1], l'arc *bn* reste tout entier d'un seul et même côté de la droite D. On voit ainsi que la droite D réalise constamment la double condition de passer par un point de l'arc *bn* et de ne point couper cet arc en ce point. On déduit de là les conclusions suivantes :

1° *La droite* D *ne cesse pas d'être tangente à l'arc* bn.

2° *L'arc* bn *peut être considéré comme la trace d'un point qui glisse sur la droite* D, *en même temps que cette droite tourne autour de ce point.*

3° *La vitesse du point qui décrit ainsi l'arc* bn *s'emprunte*

[1] Il est visible qu'en tournant de gauche à droite autour du point *m*, la droite D laisse entre elle et l'arc *mb* la tangente *smt*.

tout entière, d'une part et comme grandeur au glissement de ce point sur la droite D, *d'autre part et comme direction à la position de cette même droite.*

5. Résumons les résultats obtenus, dans les numéros qui précèdent, concernant le mouvement d'un point dans un plan.

Au lieu de procéder comme ci-dessus, on peut donner *à priori* cette définition de la ligne courbe :

La courbe est la trace d'un point qui se meut suivant une direction incessamment variable.

On peut aussi, développant davantage, présenter la même définition sous cette autre forme :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, dite directrice, le point glissant sur la directrice et la directrice tournant autour du point, tous deux simultanément et incessamment.

Partant de là, on voit d'abord que la vitesse du point décrivant s'emprunte tout entière au glissement de ce point sur la directrice, la rotation de celle-ci n'ayant d'autre effet que de modifier incessamment la direction. Il est ensuite très-aisé d'établir que, pour chaque position du point décrivant, la directrice est tangente à la courbe décrite, c'est-à-dire qu'entre elle et la courbe, on ne peut mener aucune droite.

Cela posé, ce sont, de part et d'autre, les mêmes résultats, en ce qui concerne la courbe, la directrice, la vitesse du point décrivant.

La définition donnée (n° 1) pour la vitesse, dans le cas d'un point supposé mobile sur une droite, s'étend d'elle-même au cas du mouvement d'un point sur une courbe. La seule différence consiste en ce que, au lieu d'être fixe, la droite sur laquelle le point est censé se mouvoir tourne incessamment autour de ce même point. Voici d'ailleurs les conséquences.

La vitesse d'un point qui décrit une courbe comporte à chaque instant deux modes distincts de détermination. On peut se la représenter directement ou indirectement.

Dans le premier cas, elle est déterminée, en direction, par la tangente à la ligne décrite, en grandeur, par le degré de rapidité imprimé sur cette ligne au point qui la décrit.

Dans le second cas, elle est la résultante des vitesses communiquées au point décrivant dans chacun des mouvements partiels et simultanés dont se compose le mouvement total. A ce point de vue, on peut dire aussi qu'elle est la résultante des vitesses qui animent les projections du point décrivant sur deux droites quelconques situées dans le plan de la courbe [1].

CHAPITRE II.

DE LA ROTATION D'UNE DROITE DANS UN PLAN.

Définition et mesure des vitesses angulaires.

6. Soit une droite passant par un point fixe et tournant autour de ce point dans un seul et même plan. A chaque instant la droite passe d'un lieu dans un autre, et affecte par là même un état particulier distinct de l'état de repos. Cet état d'une droite qui sort du lieu qu'elle occupe en tournant autour d'un de ses points, supposé fixe, est dit *vitesse de rotation* ou bien encore *vitesse angulaire*.

On entend ainsi par vitesse angulaire le degré de rapidité qui anime une droite dans sa rotation autour d'un point fixe, pris sur cette même droite. S'agit-il d'une droite qui se déplace dans un plan d'une manière quelconque et dont la direction change incessamment? Elle a de même et à chaque instant une vitesse angulaire complétement déterminée. Cette vitesse est celle d'une

[1] Il est sous-entendu que, relativement à chacune des deux droites choisies pour y projeter le point décrivant, les projections se font parallèlement à l'autre.

droite quelconque assujettie à passer par un point fixe et à tourner autour de ce point en restant parallèle à la droite donnée.

Ainsi que toutes les grandeurs mathématiques, la vitesse angulaire peut être constante ou bien incessamment variable. Dans tous les cas, elle est à chaque instant complétement déterminée. Lorsqu'elle varie et qu'on veut exprimer ce qu'elle est, pour une position donnée de la droite mobile, on considère exclusivement la détermination particulière qui correspond à la position donnée : *on suppose qu'à partir de cette position, la vitesse angulaire demeure invariable et l'on procède comme si elle l'était effectivement.* Par ce simple artifice, le cas des vitesses angulaires variables se ramène au cas des vitesses angulaires constantes et celui-ci reste seul à examiner.

Cela posé, nous pourrions répéter ici pour les vitesses de rotation, ce que nous avons dit plus haut pour les vitesses linéaires et reproduire presque littéralement les mêmes déductions. Bornons-nous à énoncer les règles suivantes :

1° *Dans la comparaison de plusieurs vitesses angulaires, chaque vitesse peut être exprimée par un angle.*

2° *Les vitesses que l'on compare animant certaines droites, les angles qui les expriment respectivement sont ceux que ces droites décriraient simultanément si chaque vitesse demeurait constante.*

3° *En général on est libre de fixer comme on veut, l'angle pris pour mesure de l'une des vitesses qui sont à comparer. Les autres s'en déduisent.*

Rapport existant entre la vitesse angulaire d'une droite et les vitesses que la rotation de la droite communique à ses différents points.

7. Soient o,o' deux points supposés fixes, l'un sur la droite D, l'autre sur la droite D'. Par hypothèse, ces deux droites tournent uniformément, l'une autour du point o avec la vitesse angulaire w, l'autre autour du point o' avec la vitesse angulaire w'.

Soient m, m' deux points pris respectivement, le point m sur

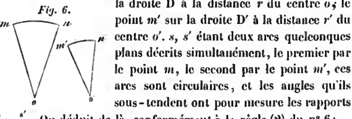


Fig. 6.

la droite D à la distance r du centre o; le point m' sur la droite D' à la distance r' du centre o'. s, s' étant deux arcs quelconques plans décrits simultanément, le premier par le point m, le second par le point m', ces arcs sont circulaires, et les angles qu'ils sous-tendent ont pour mesure les rapports $\frac{s}{r}$, $\frac{s'}{r'}$. On déduit de là, conformément à la règle (2) du n° 6 :

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{w}{w'} = \frac{\frac{s}{r}}{\frac{s'}{r'}} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{r'}{r}.$$

Soient v, v' les vitesses qui animent en même temps les points m, m' dans la description des arcs s, s'. Il est aisé de voir, conformément aux déductions des numéros (4) et (5), que ces vitesses sont normales aux rayons vecteurs r, r' et qu'elles satisfont à l'équation suivante [1] :

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{v}{v'} = \frac{s}{s'}.$$

[1] Les déductions des n°s (4) et (5) se vérifient très-simplement, comme il suit :

Soit al une droite mobile, toujours tangente à la circonférence $abcd$, tournant sans glisser le long de cette circonférence, y appliquant successivement tous ses points et l'enveloppant ainsi par une sorte d'enroulement continu. Tandis que la tangente al tourne uniformément de a vers a', concevons qu'un point m, situé d'abord en a, se déplace le long de cette droite, *avec une vitesse constante en grandeur et de manière à occuper sans cesse la position précise* où le contact s'établit entre la tangente mobile al et la circonférence fixe $abcd$.

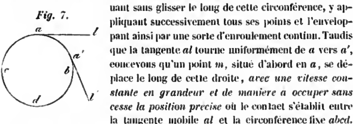


Fig. 7.

Dans ce double mouvement simultané du point m et de la droite al, *le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux uniformément*, il est visible que le point m décrit à la fois la droite mobile al et le contour fixe du cercle $abcd$. De là les conséquences établies plus haut, d'une manière générale, pour une courbe quelconque.

La combinaison des équations (1) et (2), donne

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \frac{w}{w'} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{r'}{r}.$$

Choisissons pour unité des vitesses angulaires celle qui communique l'unité de vitesse au point qui décrit la circonférence de cercle ayant l'unité pour rayon.

Si nous prenons $r' = 1$ et que nous supposions $v' = 1$, il viendra $w' = 1$, et nous aurons en général

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad w = \frac{v}{r}.$$

L'équation (4) implique les conséquences suivantes :

1° *Lorsqu'une droite tourne autour d'un de ses points supposé fixe, il y a lieu de considérer pour chaque position de la droite sa vitesse angulaire actuelle* w, *et en même temps les vitesses correspondantes de ses différents points.*

2° *Soit* v *la vitesse qui répond à la vitesse* w *pour un point quelconque pris sur la droite mobile, à la distance* r *du centre de rotation :*

La direction de la vitesse v *est perpendiculaire à la droite mobile.*

La vitesse v *est égale au produit de la distance* r *par la vitesse* w.

La vitesse w *est égale au quotient de la vitesse* v *par la distance* r.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UNE DROITE DANS UN PLAN.

---

8. Lorsqu'une droite se meut en conservant toujours une seule et même direction, ses différents points ont à chaque instant même vitesse. Cela résulte de ce que les portions de ligne décrites simultanément par deux points quelconques de la droite mobile sont nécessairement égales et parallèles. Réciproquement si tous les points d'une droite ont à chaque instant même vitesse, la droite conserve toujours une seule et même direction.

On désigne sous le nom de *translation* le mouvement d'une droite dont la direction demeure invariable ou, ce qui revient au même, dont tous les points ont à chaque instant même vitesse.

Soit D une droite libre dans un plan et s'y déplaçant comme on veut. Prenons sur cette droite le point quelconque o et, *par une translation qui rende commune à tous les autres points la vitesse du point* o, assujettissons celui-ci à décrire sa propre trajectoire. L'effet de cette translation, si elle subsistait seule, serait de ne rien changer au mouvement du point o et, en même temps, de maintenir constante, pour chaque position de la droite D, sa direction première. Il suit de là que pour restituer à la droite mobile son mouvement effectif, il suffit d'une rotation qui se compose avec la translation empruntée au point o, et qui s'accomplisse autour de ce point *comme s'il était fixe*.

S'agit-il d'abord de la translation empruntée au point o? Les vitesses qui en résultent sont *partout les mêmes* à un même instant quelconque. Elles ont donc, en chaque point, *mêmes composantes*, l'une normale à la droite mobile, *l'autre dirigée suivant cette même droite*. S'agit-il ensuite de la rotation autour du point *o*, considéré comme fixe? Les vitesses qu'elle imprime sont partout normales à la droite, parallèles entre elles, et respective-

ment proportionnelles aux rayons vecteurs correspondants. De là résulte le théorème suivant :

Lorsqu'une droite se meut dans un plan [1], *les vitesses simultanées de ses différents points étant décomposées suivant la droite et perpendiculairement à sa direction, les composantes dirigées suivant la droite sont toutes égales et de même sens.*

Dans le mouvement d'un point assujetti à rester sur une droite, on peut toujours décomposer la vitesse de ce point en deux vitesses dirigées, l'une suivant la droite et dite *vitesse de glissement*, l'autre à angle droit sur la première et dite *vitesse de circulation*. En adoptant ces dénominations, on peut substituer à l'énoncé qui précède cet autre énoncé plus simple :

Théorème I. — *Lorsqu'une droite se meut dans un plan, les vitesses de glissement de ses différents points sont toutes égales et de même sens.*

Fig. 8.

Soit oo' la vitesse du point o à l'instant considéré. Par le point o', menons deux droites, l'une $o'A$ parallèle à la droite D, l'autre D′ faisant avec la droite $o'A$ l'angle qui a pour tangente le rapport exprimant la vitesse angulaire de la droite D autour du point o. Il est visible que tout point m de la droite D est animé de deux vitesses simultanées représentées respectivement, l'une par la droite mn égale et parallèle à oo', l'autre par la droite nm' menée par le point n perpendiculairement à $o'A$ et limitée à la droite D′. De là, et de ce qui précède, résultent les corollaires suivants :

1° *Les vitesses simultanées des différents points de la droite* D *ont pour lieu de leurs extrémités une droite* D′ *oblique sur la première.*

[1] Ce théorème et les suivants sont tout à fait généraux. Ils s'appliquent, ainsi qu'on le verra plus loin, au mouvement quelconque d'une droite dans l'espace.

2° *Étant données les vitesses simultanées de deux points quelconques de la droite* D, *celles des points* o *et* m, *par exemple, toutes les autres en résultent.*

3° *Lorsque deux points d'une droite ont, en même temps, même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points.*

4° *Lorsque deux points d'une droite n'ont pas en même temps même vitesse, les vitesses diffèrent en chaque point.*

9. Supposons qu'on transporte en un même point *a* les vitesses qui animent les différents points de la droite D, à un instant quelconque déterminé. Supposons, en outre, qu'on projette orthogonalement toutes ces vitesses sur une même droite menée par le point *a* parallèlement à D. Chaque vitesse ainsi projetée n'a qu'une seule et même projection, la portion de droite qui représente la vitesse de glissement commune à tous les points de la droite mobile. Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Théorème II. — *Si l'on transporte en un même point quelconque les vitesses simultanées des différents points d'une droite, ces vitesses ont leurs extrémités sur une seule et même droite perpendiculaire à la première.*

Du mouvement d'un plan sur lui-même et d'une droite dans un plan.

10. Théorème III. — *Lorsqu'un plan se déplace sur lui-même, les vitesses simultanées de deux points de ce plan étant déterminées, celles de tous les autres points le sont en même temps.*

Soient *a* et *b* deux points d'un plan qui se déplace sur lui-même. Par hypothèse, on connaît les vitesses actuelles et simultanées des deux points *a* et *b*.

Soit *m* un troisième point quelconque situé dans le plan mobile, en dehors de la droite *ab* [1].

[1] Si le point *m* était pris sur la droite *ab*, on obtiendrait *directement* sa vitesse, en opérant comme nous l'avons indiqué au n° 8.

Transportons en m les vitesses respectives des deux points a et b. Soit ma' la première, mb' la seconde. Par le point a', abaissons sur am la perpendiculaire $a'p$. Par le point b' abaissons sur mb la perpendiculaire $b'q$. Prolongeons les droites $a'p$, $b'q$ jusqu'à leur rencontre en n et tirons la droite mn.

Fig. 9.



La droite mn, *ainsi déterminée, représente en direction, sens et grandeur, la vitesse du point* m.

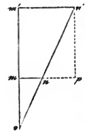
Cette proposition résulte évidemment de ce qu'en vertu du théorème II (n° 9), l'extrémité de la vitesse du point m se trouve à la fois sur chacune des deux perpendiculaires $a'p$ et $b'q$. Elle implique d'ailleurs, comme corollaires, les déductions suivantes :

1° *Tout mode de déplacement qui communique à deux points d'un plan mobile sur lui-même leurs vitesses actuelles et simultanées, remplit en même temps cette même condition par rapport à tous les autres points.*

2° *Si deux points d'un plan qui se meut sur lui-même ont en même temps même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points. Les vitesses simultanées des différents points sont donc toutes les mêmes ou toutes différentes.*

11. Théorème IV. — *Lorsqu'un plan se meut sur lui-même et que tous ses points n'ont pas en même temps même vitesse, il est un point du plan dont la vitesse est nulle. On désigne ce point sous le nom de* centre instantané de rotation. *Les vitesses simultanées des autres points sont les mêmes que si le plan tournait autour de ce centre considéré comme fixe.*

Fig. 10.



Soit un plan qui se meut sur lui-même, et dont tous les points n'ont pas même vitesse à l'instant que l'on considère; m et m' étant deux points de ce plan, soient mn, et $m'n'$ les portions de droite qui

représentent en direction, sens et grandeur, les vitesses respectives des points m et m'. Par hypothèse; *ces deux vitesses diffèrent en quelque chose.*

Supposons d'abord que les vitesses mn, $m'n'$ soient parallèles. Il faut alors qu'elles soient toutes deux perpendiculaires à la droite mm'. Autrement, et *puisqu'elles diffèrent*, leurs composantes, suivant cette droite, ne pourraient être égales et de même sens. (Théorème I, n° 8.) Tirons la droite nn', et déterminons le point o où elle vient couper la droite mm'. Il est visible qu'une rotation, commençant autour du point o peut communiquer aux deux points m et m' leurs vitesses actuelles et simultanées. Concluons que cette même rotation communique *en même temps* à tous les autres points du plan mobile leurs vitesses respectives. (N° 10, théorème III, corollaire 1.) On voit d'ailleurs qu'en désignant par w la vitesse angulaire qui correspond à la rotation du plan mobile autour du point o, et par p l'extrémité de la vitesse $m'n'$ transportée au point m, on a très-simplement.

$$w = \frac{mn}{mo} = \frac{m'n'}{m'o} = \frac{m'n' - mn}{mm'} = \frac{np}{mm'}.$$

Supposons maintenant les vitesses mn, $m'n'$ non parallèles, et considérons le point o situé à la rencontre des perpendiculaires élevées, l'une en m sur mn, l'autre en m' sur $m'n'$. Si l'on détermine la vitesse du point o d'après le procédé du n° 10, on reconnait immédiatement que cette vitesse est nulle. D'un autre côté, si l'on transporte en m, sur mp, la vitesse $m'n'$, et qu'on tire la droite np, on voit que cette droite est perpendiculaire à la droite mm'. (Théorème II, n° 9). Les triangles mpn, $m'om$ sont donc semblables, et l'on a

Fig. 11.

$$\frac{mn}{mo} = \frac{mp}{m'o} = \frac{np}{mm'},$$

la longueur mp pouvant être remplacée par la longueur égale $m'n'$.

Il suit de là qu'une rotation commençant autour du point o, avec la vitesse angulaire

$$w = \frac{mn}{mo} = \frac{m'n'}{m'o} = \frac{np}{mm'},$$

communique aux deux points m et m' leurs vitesses actuelles et simultanées. Concluons que cette même rotation communique *en même temps* à tous les points du plan leurs vitesses respectives [1]. (N° 10. Théorème III, corollaire 1.)

Le point o déterminé, comme on vient de le voir, est désigné sous le nom de *centre instantané de rotation.*

A chaque position du plan mobile répond une position du centre instantané de rotation, et le point du plan qui coïncide avec ce centre a une vitesse nulle. Si le centre instantané de rotation était fixe sur le plan mobile, c'est-à-dire s'il coïncidait toujours avec un seul et même point de ce plan, il serait absolument fixe, puisqu'il resterait en un même point constamment dénué de vitesse. Le mouvement du plan se réduirait donc à une rotation simple autour d'un centre fixe. Mais, en général, il en est autrement. Il faut donc que le centre dont il s'agit change incessamment de position dans le plan mobile. Concluons qu'*en général* tout déplacement d'un plan sur lui-même résulte du double mouvement d'un point et du plan, le point glissant dans ce plan en même temps que le plan tourne autour de ce point.

Soit μ un point assujetti à se mouvoir de manière à coïncider constamment avec le centre instantané de rotation. Ainsi qu'on vient de le voir, le point μ glisse dans le plan mobile. Il a donc dans ce plan, et pour chaque position du plan, une vitesse actuelle déterminée. La rotation qui s'accomplit autour du point μ ne

[1] On parvient plus vite à cette conclusion en observant qu'une rotation commençant autour du point o, avec la vitesse angulaire

$$w = \frac{mn}{mo},$$

communique aux deux points m et o leurs vitesses actuelles et simultanées.

peut altérer en rien cette vitesse : elle est donc aussi la vitesse du point μ dans l'espace[1].

12. Considérons le plan mobile à un instant quelconque. Soit P ce plan ; o le centre instantané de rotation ; w la vitesse angulaire du plan P autour du centre o ; m un point quelconque du plan P ; v la vitesse du point m.

On sait, d'après ce qui précède, que la vitesse v est perpendiculaire au rayon vecteur om et représentée en grandeur par le produit $om.w$.

Imaginons qu'on transporte de o en m la rotation w, et qu'en même temps[2] l'on imprime au plan P une translation représentée en direction, sens et grandeur par la vitesse v.

La rotation w transportée en m se compose avec la translation v, de manière à communiquer aux deux points m et o leurs vitesses actuelles et simultanées. Il s'ensuit que cette rotation et cette translation communiquent en même temps à tous les points du plan P leurs vitesses respectives.

De là résulte la déduction suivante :

L'état de mouvement d'un plan qui se meut sur lui-même et dont tous les points n'ont pas en même temps même vitesse, peut être considéré soit comme se réduisant à une rotation simple autour du centre instantané, soit comme résultant de cette même rotation transportée autour d'un point quelconque du plan mobile et composée avec une translation égale à la vitesse de ce point.

13. Lorsqu'une droite se déplace dans un plan, on peut concevoir qu'elle entraîne ce plan avec elle. Tout se passe donc comme nous l'avons vu pour le cas général d'un plan qui se meut sur lui-même. A chaque position de la droite mobile répond, en général, un centre instantané de rotation, et, pour chaque point,

[1] Considérons les traces du point μ sur le plan mobile et dans l'espace : soit s la première et s' la seconde. Il est visible que la ligne s' est l'enveloppe des positions successives de la ligne s. On voit aussi que le mouvement du plan mobile est le même que si la ligne s roulait, sans glisser, sur la ligne s'.

[2] Il suffit pour cela d'imprimer cette vitesse à deux points du plan P, soit, par exemple, aux deux points m et o. (Voir n° 10, théorème III, corollaire 2°.)

même vitesse que s'il y avait rotation simple autour de ce centre supposé fixe.

Considérons la droite dont il s'agit dans une position quelconque déterminée. Soit *ab* cette position, *o* la position correspondante du centre instantané de rotation, o' le pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur *ab*, *m* un point quelconque de la droite oo', *w* la vitesse angulaire actuelle de la droite mobile. Nous savons déjà que les vitesses actuelles des différents points de la droite *ab* sont les mêmes que si cette droite tournait autour du centre o avec la vitesse angulaire *w*. Nous ajoutons, conformément à la déduction du n° 12, qu'on peut considérer ces mêmes vitesses comme résultant d'un glissement et d'une rotation simultanés, la droite *ab* tournant autour du point *m* avec la vitesse *w* et glissant en même temps sur elle-même avec la vitesse

Fig. 12.

$$r = om.\, w.$$

Étant données les vitesses simultanées des différents points de la droite *ab*, on peut considérer exclusivement ou isolément leurs composantes normales à cette droite. Ces composantes sont celles que nous avons déjà désignées sous le nom de *vitesses de circulation*. Pour les obtenir toutes à la fois, et rien qu'elles, il suffit de transporter en o' la rotation *w*. Le point o', déterminé par la projection du point o sur la droite *ab*, est dit *centre instantané de circulation*. Il se distingue des autres points de la droite *ab* en ce qu'il n'a pas de vitesse de circulation, ou, ce qui revient au même, en ce que sa vitesse actuelle est une vitesse de glissement dirigée tout entière suivant la droite mobile.

Les déductions qui précèdent ne s'appliquent pas seulement à une droite qui se meut dans un plan supposé fixe : elles s'appliquent également à toute droite située dans un plan qui se meut sur lui-même. Elles peuvent se résumer dans les termes suivants :

Lorsqu'une droite se meut dans un plan, son mouvement se

compose d'un glissement sur elle-même et d'une rotation autour d'un point choisi, comme on veut, sur la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation. Quel que soit ce point, la vitesse angulaire reste toujours la même. La vitesse de glissement est la vitesse effective du point choisi pour centre[1].

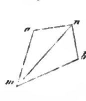
Observons que si l'on considère un point assujetti à coïncider toujours avec le centre instantané de circulation, ce point a pour vitesse non-seulement la vitesse de glissement, commune à tous les points de la droite mobile, mais en outre celle qui anime, parallèlement à cette droite, le centre instantané de rotation, considéré dans ses positions successives.

Règle générale du quadrilatère des vitesses.

14. On sait que la vitesse d'un point admet comme modes équivalents de représentation une infinité de systèmes tous différents les uns des autres et comprenant chacun deux composantes.

Lorsqu'on considère en même temps deux de ces systèmes, si l'on connaît pour chacun l'une des composantes qui en fait partie et la direction de l'autre composante, la vitesse du point est déterminée.

Fig. 13.



Soit *ma* la composante donnée dans l'un des deux systèmes que l'on considère, et *an* une droite menée par le point *a* suivant la direction connue de l'autre composante. Soit en même temps, et de la même manière, *mb* la composante donnée dans le second système et *bn* une droite parallèle à l'autre composante. La vitesse cherchée est représentée en direction, sens et grandeur par la diagonale *mn* du quadrilatère *manb*.

La règle que nous venons de formuler dérive immédiatement

[1] On ne perdra pas de vue que la déduction du n° 12 s'applique plus généralement encore au mouvement d'une droite dans un plan.

de la règle 3 du n° 2. Nous la désignerons sous le nom de *règle du quadrilatère*. On observera qu'elle est générale et s'applique à tous les cas possibles, le quadrilatère *manb* pouvant être plan ou gauche, suivant les circonstances.

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE.

Extension des principes applicables au mouvement d'une droite et d'un point dans un plan.

15. Reportons-nous aux nᵒˢ 6 et 7. Les principes établis pour la rotation d'une droite dans un plan permettent d'écrire immédiatement les deux propositions suivantes :

1° *Lorsqu'une droite ayant un point fixe tourne autour de ce point, dans un seul et même plan, les vitesses des autres points sont normales à la droite et respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs correspondants.*

2° *Lorsqu'un plan a deux points fixes et qu'il tourne autour de la droite menée par ces points, les vitesses des autres points sont normales au plan et respectivement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe de rotation.*

Cela posé, voici les conséquences :

Théorème V. — *Lorsqu'une droite ayant un point fixe tourne autour de ce point, les vitesses des autres points sont normales à la droite, parallèles entre elles et respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs correspondants.*

Soit OL une droite ayant un point fixe O et tournant autour

de ce point. Prenons en dehors de la droite OL un second point fixe O'.

Fig. 14.

Soit P un plan assujetti à passer constamment par la droite OL et par les deux points O, O', supposés fixes dans ce plan.

On voit aisément que la rotation de la droite OL, autour du point O, se compose, en général, de deux rotations *simultanées*, la droite OL tournant dans le plan P *en même temps* que ce plan tourne autour de la droite OO'.

Soient m, m' deux points quelconques de la droite OL, et mp, $m'p'$ les perpendiculaires abaissées de ces points sur la droite OO'.

Les vitesses communiquées aux points m, m', par la rotation de la droite OL dans le plan P, sont normales à cette droite et respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs Oω, Oω'. (Proposition 1.)

Les vitesses communiquées à ces mêmes points, par la rotation du plan P autour de la droite OO', sont normales à ce plan et respectivement proportionnelles, d'une part, aux perpendiculaires mp, $m'p'$ (proposition 2), d'autre part et conséquemment, aux rayons vecteurs Oω, Oω'.

Il suit de là que les *vitesses totales* imprimées *simultanément* aux points m, m' sont, *comme leurs composantes*, parallèles entre elles, perpendiculaires à la droite OL et respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs Oω, Oω'.

Corollaire. — *L'état de mouvement qui anime la droite* OL *à un instant quelconque déterminé est le même que si cette droite tournait autour du point* O, *dans le plan* [1] *où sont dirigées les vitesses totales de ses différents points.*

16. Théorème VI. — *Les vitesses simultanées des différents points d'une droite étant décomposées suivant la droite et norma-*

[1] Pour déterminer ce plan, il suffit de connaître la position de la droite OL et la direction de la vitesse qui anime un point quelconque de cette droite.

lement à sa direction, les composantes dirigées suivant la droite sont toutes égales et de même sens.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de reproduire littéralement les déductions du n° 8. De là résultent les corollaires suivants :

1° *Lorsqu'un point d'une droite est animé d'une vitesse* perpendiculaire *à cette droite, la même condition subsiste en même temps pour tous les autres points.*

2° *Les vitesses simultanées des différents points d'une droite sont toutes parallèles à un même plan; le lieu de leurs extrémités est une droite* oblique *sur la première.*

3° *Étant données les vitesses simultanées de deux points d'une droite, toutes les autres en résultent. Elles sont parallèles à un même plan et aboutissent à une même droite, tous deux déterminés, le plan par les directions des vitesses données, la droite par les extrémités de ces mêmes vitesses*[1].

4° *Lorsque les vitesses simultanées de deux points d'une droite sont dirigées dans un seul et même plan, ce plan contient à la fois la droite et les vitesses simultanées de tous ses points;*

5° *Lorsque deux points d'une droite ont en même temps même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points;*

6° *Lorsque deux points d'une droite n'ont pas en même temps même vitesse, les vitesses diffèrent en chaque point.*

17. On voit par ce qui précède comment les propositions du n° 8 se généralisent et s'appliquent au mouvement quelconque d'une droite dans l'espace. L'énoncé du n° 9 comporte la même extension. De là résulte, en général, le théorème suivant :

Théorème VII. — *Si l'on transporte en un même point quelconque les vitesses simultanées des différents points d'une droite, ces vitesses ont leurs extrémités sur une seule et même droite*

[1] Un seul cas échappe à cette règle, celui où les vitesses des différents points de la droite sont toutes situées dans un seul et même plan. Ce cas se résout par la construction du n° 8, qui, d'ailleurs, est tout à fait générale.

perpendiculaire *à la première. A chaque point de celle-ci correspond un point de l'autre et réciproquement.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire observer qu'après leur transport en un même point, les vitesses des différents points de la droite mobile ont leurs extrémités situées toutes à la fois dans trois plans déterminés. Le premier de ces plans est perpendiculaire à la droite mobile (n° 16, théorème VI); le second et le troisième sont respectivement parallèles, l'un aux vitesses considérées (n° 16, corollaire 2), l'autre aux deux droites qui limitent ces mêmes vitesses prises dans leur vraie position (n° 16, corollaire 2).

18. Reprenons la définition déjà donnée pour la ligne courbe au n° 3.

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile [1], *le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux simultanément.*

Cette définition est tout à fait générale.

De ce que la directrice tourne à chaque instant autour du point décrivant, il s'ensuit que les vitesses simultanées de ses différents points sont dirigées toutes à la fois dans un seul et même plan. (N° 15, théorème V, corollaire.) Ce plan peut être fixe; il peut aussi tourner incessamment autour de la directrice. Dans le premier cas, la courbe engendrée est plane; dans le second, elle est *à double courbure;* on désigne alors sous le nom de *plan osculateur* le plan mobile déterminé, pour chaque position de la directrice, par les vitesses simultanées de ses différents points.

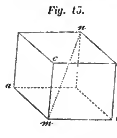
Considérons en particulier le point décrivant. Il a même état de mouvement que si la directrice et le plan osculateur s'arrêtaient tous deux dans les positions qu'ils affectent à l'instant considéré. On voit d'ailleurs aisément que les vitesses de ses projections sur les axes coordonnés sont les projections, ou, ce qui revient au

[1] Considérée par rapport au point décrivant, cette droite est désignée sous le nom de *directrice.*

même, les composantes respectives de sa vitesse suivant ces mêmes axes. De là résultent plusieurs règles faciles à établir et dont il suffit que nous donnions les énoncés :

1re RÈGLE. — *Le point* m *étant animé de trois vitesses actuelles et simultanées, représentées en direction, sens et grandeur par les portions de droite* ma, mb, mc, *la vitesse résultante est représentée, en direction, sens et grandeur, par la diagonale* mn *du parallélépipède* mabcn *construit sur les trois côtés* ma, mb, mc.

Fig. 15.



2me RÈGLE. — *Étant donnée la droite* mn, *qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse actuelle du point* m, *si, sur cette droite prise pour diagonale, on construit un parallélépipède quelconque* mabcn, *la vitesse du point* m *peut être considérée comme résultant de trois vitesses simultanées, représentées en direction, sens et grandeur par les côtés* ma, mb, mc.

3me RÈGLE. — *Le point* m *étant animé de* n *vitesses actuelles et simultanées, représentées en direction, sens et grandeur par les portions de droite* ma, ab, bc..... pq, *placées bout à bout les unes après les autres, la vitesse résultante est représentée en direction, sens et grandeur par la droite* mq, *qui joint l'origine de la première droite à l'extrémité de la dernière* [1].

4me RÈGLE. — *Étant donnée la droite* mq, *qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse actuelle du point* m, *si, sur cette droite prise pour côté, on construit un polygone quelconque* mabc..... pq, *la vitesse du point* m *peut être considérée comme résultant des vitesses simultanées représentées en direction, sens et grandeur par les côtés successifs* ma, ab, bc..... pq [1].

[1] Le lecteur est prié de faire la figure qui s'applique en même temps au cas de la 3me règle et à celui de la 4me.

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE D'UNE DROITE, D'UN PLAN, D'UN SOLIDE.

Exposé des théorèmes fondamentaux.

19. Théorème VIII. — *Lorsqu'un solide se meut, si les vitesses de trois points non situés en ligne droite sont déterminées, celles de tous les autres points le sont en même temps.*

Soient a, b, c trois points non situés en ligne droite et appartenant à un solide qui se meut. Par hypothèse, on connaît les vitesses actuelles et simultanées des trois points a, b, c.

Soit m un point quelconque du solide pris en dehors du plan abc [1]. Transportons en m la vitesse du point a et, par son extrémité, menons un plan perpendiculaire à la droite ma. En répétant cette opération d'abord pour la vitesse du point b et la droite mb, ensuite pour la vitesse du point c et la droite mc, nous avons deux nouveaux plans respectivement perpendiculaires, l'un à la droite mb, l'autre à la droite mc.

Soit n le point unique [2] commun aux trois plans que nous

[1] Si le point m était pris dans le plan abc, on obtiendrait *directement* sa vitesse en opérant comme dans le cas général et observant que *l'extrémité de cette vitesse aboutit au plan déterminé par les extrémités des trois autres prises dans leur vraie position*. Cela résulte évidemment du corollaire 2 du théorème VI.

[2] Les intersections du premier plan avec chacun des deux autres sont respectivement perpendiculaires, l'une au plan amb, l'autre au plan amc. Elles ne peuvent être parallèles, puisque, par construction, les deux plans amb, amc diffèrent. Il s'ensuit qu'étant situées dans un même plan, elles se coupent nécessairement en un point unique.

venons de déterminer : *la droite mn représente, en direction, sens et grandeur, la vitesse du point m.*

Il suffit de se reporter au théorème VII, n° 17, pour voir comment s'expliquent et se justifient la construction et la proposition qui précèdent.

Corollaires. — 1. *Tout mode de déplacement qui communique à trois points d'un solide, non situés en ligne droite, leurs vitesses actuelles et simultanées, remplit en même temps la même condition pour tous les autres points.*

2. *Si trois points d'un solide, non situés en ligne droite, ont en même temps même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points.*

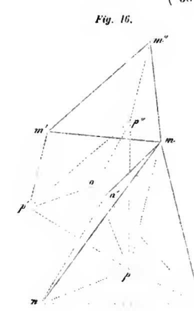
20. Théorème IX. — *Lorsqu'un solide se meut et que tous ses points n'ont pas en même temps même vitesse, parmi les droites qu'on peut considérer comme faisant partie du solide, il en est une dont l'état actuel de mouvement se réduit à un simple glissement sur elle-même. Cette droite est désignée sous le nom d'*axe instantané glissant. *Les vitesses simultanées des différents points du solide sont les mêmes que si, glissant avec cet axe, il tournait en même temps autour de ce même axe.*

Soit un solide qui se meut et dont tous les points n'ont pas même vitesse à l'instant que l'on considère.

Soient m, m', m'' trois points de ce solide, non situés en ligne droite; v, v', v'' leurs vitesses respectives, actuelles et simultanées.

Transportons en m les trois vitesses v, v', v'' et supposons qu'elles y soient représentées, la vitesse v par mn, la vitesse v' par mn', la vitesse v'' par mn''. Sur le plan déterminé par les extrémités n, n', n'', projetons orthogonalement le triangle $mn'm''$, et désignons par p la projection du point m, par p' celle du point m', par p'' celle du point m''. Si nous tirons les droites pn, pn', pn'', il est visible que chacune des trois vitesses mn, mn', mn'' peut être considérée comme ayant pour composante commune la vitesse mp, la seconde composante étant située dans

Fig. 16.



le plan $nn'n''$ et représentée par pn pour la vitesse v, par pn' pour la vitesse v', par pn'' pour la vitesse v''. On sait, d'ailleurs, que les droites nn', $n'n''$, $n''n$, sont respectivement perpendiculaires nn' à mm', $n'n''$ à $m'm''$, $n''n$ à $m''m$. (Théorème VII.)

Cela posé, la droite nn' est en même temps perpendiculaire aux droites mp, $m'p'$, mm'; elle est donc perpendiculaire au plan $mpp'm'$ et, par conséquent, à la droite pp'. On démontrerait de même que $n'n''$ est perpendiculaire à $p'p''$ et $n''n$ à $p''p$. Il suit de là que les perpendiculaires menées dans le plan $pp'p''$, en p sur pn, en p' sur pn', en p'' sur pn'', se coupent toutes trois en un même point o et satisfont aux conditions suivantes [1] :

$$\frac{pn}{op} = \frac{pn'}{op'} = \frac{pn''}{op''} = \frac{nn'}{pp'} = \frac{n'n''}{p'p''} = \frac{n''n}{p''p}.$$

Considérons la normale élevée en o sur le plan $nn'n''$, et ima-

[1] Cette déduction résulte immédiatement de l'une ou l'autre des considérations suivantes :

1° Pris deux à deux et groupés comme il suit, les triangles opp' et pnn', opp'' et pnn'', $op'p''$ et $pn'n''$ ont leurs trois côtés respectivement perpendiculaires et sont, par conséquent, semblables;

2° Prises deux à deux, les composantes pn, pn', pn'' ont mêmes projections orthogonales, pn et pn' sur pp', pn' et pn'' sur $p'p''$, pn'' et pn sur $p''p$. On peut donc appliquer ici les résultats établis n° 11.

ginons que le solide tourne en glissant le long de cette normale. Si la vitesse de rotation est égale au rapport $\frac{nn'}{pp'}$, et celle de glissement à la composante mp, il est évident que ce double mouvement, pris à son origine, communique aux trois points m, m', m'' leurs vitesses actuelles et simultanées [1]. Concluons que ce même double mouvement communique en même temps à tous les points du solide leurs vitesses respectives. (Théorème VIII, corollaire 1.)

On donne à la droite déterminée, comme on vient de le voir par la condition de contenir le point o et d'être normale au plan $nn'n''$, le nom d'*axe instantané glissant*. A chaque position du solide qui se meut correspond une position particulière de l'axe instantané. En général, l'une et l'autre changent incessamment. Dans tous les cas, les vitesses des différents points du solide sont à chaque instant les mêmes que si, glissant avec cet axe, il tournait en même temps autour du même axe [2].

[1] Les points m et p, m' et p', m'' et p'' sont situés deux à deux sur des droites parallèles à la normale. Dans la rotation avec glissement le long de la normale, tous les points situés sur une même parallèle à la normale ont évidemment même vitesse.

[2] De là résultent les déductions suivantes :

Considérons une droite assujettie à coïncider toujours avec l'axe instantané glissant. Considérons en même temps les traces de cette droite dans le solide en mouvement et dans l'espace. Ces traces sont des surfaces réglées. Soit s la première et s' la seconde. Il est visible que la surface s' est l'enveloppe des positions successives de la surface s. On voit aussi que le mouvement du solide est le même que si la surface s roulait sur la surface s' en glissant le long de l'arête de contact.

Lorsque le solide renferme un point fixe, l'axe instantané passant par ce point, les surfaces s, s' sont des cônes ayant le point fixe pour sommet commun et roulant l'une sur l'autre sans glisser.

En général, tout mouvement d'un solide se compose d'une translation empruntée à l'un de ses points et d'une rotation simultanée autour de ce même point. Si la rotation subsistait seule, le mouvement se réduirait au roulement du cône s sur le cône s'. Pour tenir compte de la translation, il suffit de la communiquer à ces deux cônes, sans rien changer d'ailleurs à leur mouvement relatif.

Tel est, dirons-nous avec M. Poinsot, et en généralisant l'énoncé que nous

Pour avoir la direction de l'axe instantané, il suffit, en général, de transporter en un même point quelconque a les vitesses actuelles et simultanées de trois points m, m', m'' non situés en ligne droite. Soient n, n', n'' les extrémités respectives des trois vitesses transportées au point a et P le plan qu'elles déterminent. La perpendiculaire abaissée du point a sur le plan P fixe la direction de l'axe instantané et représente la vitesse de glissement le long de cet axe. La vitesse de rotation autour de ce même axe a pour mesure le rapport de la droite nn' à la projection sur le plan P de la droite correspondante mm'.

21. La solution précédente est en défaut lorsque deux des trois points $n\,n'n''$ se confondent[1] ou qu'ils tombent tous les trois sur une seule et même droite.

Observons qu'en ce cas, la droite $nn'n''$ est nécessairement perpendiculaire au plan $mm'm''$. Cela résulte évidemment du théorème VIII. Voici d'ailleurs les conséquences :

Prenons un quatrième point μ situé en dehors du plan des trois premiers. Parmi les quatre points m, m', m'', μ, il en est trois au moins dont les vitesses transportées en a n'ont pas leurs extrémités situées sur une seule et même droite[2]. Cela suffit pour que la solution précédente devienne applicable.

Poursuivons. Puisque l'axe instantané glissant et le plan $mm'm''$ sont tous deux perpendiculaires à la droite $nn'n''$, il s'ensuit qu'ils sont parallèles entre eux. Considérons la projection de l'axe instantané sur le plan $mm'm''$: elle est parallèle à cet axe, et elle a,

lui empruntons, *tel est le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si obscure et si complexe du mouvement d'un corps* dans l'espace. S'il s'agit de l'état actuel du mouvement de ce corps à un instant quelconque déterminé, il est plus simple de considérer le corps comme une vis tournant dans son écrou.

[1] Il n'y a pas lieu de considérer le cas où les trois points n, n', n'' se confondraient, c'est-à-dire où trois points du solide, non situés en ligne droite, auraient même vitesse. On sait qu'en ce cas, cette même vitesse est commune à tous les autres points.

[2] S'il en était autrement, il faudrait qu'une seule et même droite fût en même temps perpendiculaire à deux plans non parallèles, ce qui est impossible.

pour chacun de ses points, une seule et même vitesse dirigée tout entière dans le plan $mm'm''$. Il suit de là que si l'on prend les vitesses de tous ces points dans leurs vraies positions, le lieu de leurs extrémités est une parallèle à l'axe instantané : or, ce lieu est l'intersection du plan $mm'm''$ avec le plan mené par les extrémités des vitesses v, v', v'' prises dans leur position véritable. Il suffit donc de construire cette intersection pour avoir une parallèle à l'axe instantané. Le reste s'achève comme précédemment.

22. Théorème X. — *Si l'on transporte en un même point quelconque les vitesses simultanées des différents points d'un solide, les extrémités de ces vitesses aboutissent toutes à un seul et même plan perpendiculaire à l'axe instantané glissant.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème IX. On peut d'ailleurs l'établir directement et en déduire le théorème IX en se fondant sur le théorème VII et procédant comme nous l'avons fait ailleurs. (Voir notre *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation.*)

Composition et décomposition des rotations.

23. Lorsqu'un solide tourne autour d'un axe, on représente sa vitesse de rotation par une portion de l'axe égale en longueur à la grandeur de cette même vitesse. On tient compte du sens en fixant sur un point quelconque de l'axe l'origine de la longueur prise pour mesure de la vitesse, et portant cette longueur du côté où la rotation s'effectue de gauche à droite, pour un observateur placé le long de l'axe, les pieds à l'origine.

Ces conventions admises, il est aisé de voir que *deux rotations simultanées, autour de deux axes qui concourent, se composent en une rotation unique, de la même manière que si les portions de droites qui représentent ces rotations exprimaient des vitesses linéaires animant en même temps un seul et même point, le point où les axes concourent.*

Il suffit pour cela de considérer, dans le plan des deux axes

donnés, trois points non situés en ligne droite et de constater qu'ils acquièrent même vitesse, soit par l'effet combiné des deux rotations composantes, soit par l'effet simple de la rotation résultante. On peut d'ailleurs choisir ces trois points, comme on veut, et, par exemple, en prendre un sur chaque axe.

La proposition, établie pour deux rotations dont les axes concourent, s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de rotations à axes concourants. Il est clair, d'ailleurs, que, si plusieurs rotations simultanées se composent en une rotation unique, la réciproque subsiste nécessairement comme s'il s'agissait d'un point et de la vitesse qui l'anime.

Concluons que, *dans le mouvement d'un solide, les rotations à axes concourants se composent et se décomposent d'après les mêmes règles que les vitesses dans le mouvement d'un point.*

24. Deux rotations égales et de sens contraire, autour d'axes parallèles, forment ensemble un système désigné par M. Poinsot sous le nom de *couple de rotation*. L'effet qu'elles produisent est celui d'une simple translation perpendiculaire au plan des deux axes ou du couple. En nommant ω la vitesse angulaire, p la distance des axes, et v la vitesse de translation résultante, on a

$$v = p.\omega.$$

On voit aisément qu'une même vitesse, $p\omega$, est communiquée en même temps aux différents point de chacun des deux axes. Il s'ensuit que cette même vitesse est commune à tous les points du solide. (Théorème VIII, corollaire 2.)

L'identité, qui subsiste entre les couples de rotation et les vitesses de translation résultantes, permet de les substituer les uns aux autres et d'appliquer aux couples ce qu'on a démontré pour les vitesses, ou réciproquement.

De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° *Un couple de rotation peut être transporté et tourné comme on veut, soit dans son plan, soit dans un plan parallèle. On peut aussi changer en même temps la distance des axes et la vitesse*



angulaire. Si le moment[1] *du couple, sa direction et son sens restent les mêmes, rien ne change dans l'effet produit.*

2° *Les couples de rotation se composent entre eux comme se composent entre elles les vitesses résultantes transportées en un seul et même point.*

3° *Étant donnée une rotation quelconque autour d'un axe A, l'effet produit ne change point, soit qu'elle subsiste seule, soit qu'on la compose avec deux rotations égales et de sens contraire autour d'un axe quelconque A'. Supposons l'axe A' parallèle à l'axe A, et, de part et d'autre, même grandeur absolue des vitesses angulaires. La rotation autour de l'axe A équivaut à une rotation égale et de même sens, s'effectuant autour de l'axe A' et se composant avec le couple de rotation AA'.*

4° *Réciproquement toute rotation s'effectuant autour d'un axe A', et se composant avec une translation perpendiculaire à cet axe, se résout en une rotation simple, identique à la première et s'effectuant autour d'un second axe A parallèle au premier. L'axe A est situé dans le plan mené par l'axe A' normalement à la vitesse de translation. Il est le lieu des points qui, dans la rotation autour de l'axe A', empruntent à cette rotation une vitesse égale et contraire à celle qui résulte de la translation donnée.*

5° *Deux rotations quelconques simultanées*[2], *autour de deux axes parallèles, se composent en une rotation unique autour d'un axe parallèle aux axes donnés et situé dans leur plan. La vitesse résultante est la somme algébrique des vitesses composantes. L'axe résultant est le lieu des points qui empruntent aux deux rotations composantes des vitesses égales et contraires.*

Pour justifier cette dernière conséquence, il suffit d'observer que si l'on transporte autour de l'axe résultant (déterminé comme

[1] On appelle *moment* d'un couple le produit de la distance des axes par la vitesse angulaire. La direction d'un couple est celle de son plan. Le sens est déterminé par celui de la vitesse de translation résultante.

[2] Il est entendu que ces deux rotations ne sont point égales et contraires, autrement elles formeraient un couple et équivaudraient à une simple translation.

on vient de le dire) les deux rotations données, les deux couples de rotation qu'il faut composer avec elles, pour ne pas changer l'effet produit, sont égaux et de signe contraire.

25. La connaissance du mode suivant lequel les rotations se composent entre elles et avec les vitesses de translation conduit très-simplement à la détermination de l'axe instantané glissant.

Soient, en effet, *m*, *m'*, *m''* trois points d'un solide non situés en ligne droite, et *v*, *v'*, *v''* leurs vitesses respectives, actuelles et simultanées.

Concevons une translation rendue commune à ces trois points et s'effectuant avec la vitesse *v* empruntée au point *m*. Il est visible que pour restituer aux deux autres points leur état actuel de mouvement, il faut, en général, composer cette translation, d'une part, avec une rotation de la droite *mm'* autour du point *m*, d'autre part, avec une rotation du point *m''* autour de la droite *mm'*. La première de ces deux rotations peut être considérée comme s'effectuant autour d'une droite passant par le point *m*, et facile à déterminer conformément aux déductions des numéros 15 et 16. Il en résulte que les deux rotations à considérer ont des axes concourants et se composent en une rotation unique, autour d'un axe A' passant par le point *m*.

Cela posé, si l'on décompose la translation, rendue commune aux trois points *m*, *m'*, *m''*, en deux translations simultanées, l'une parallèle à l'axe A' de la rotation résultante, l'autre perpendiculaire à ce même axe, on sait que celle-ci peut se composer avec la rotation de manière à ne laisser subsister que cette même rotation autour d'un axe A parallèle au premier. Il suit de là que tout se réduit à une rotation s'effectuant autour de l'axe A et se composant avec une translation parallèle au même axe.

L'axe A, ainsi déterminé, est l'axe instantané glissant. Il est parallèle à la droite *mm'*, lorsque les vitesses *v*, *v'* sont les mêmes. Il se confond avec cette droite, lorsque les vitesses *v*, *v'* sont égales, de même sens et dirigées suivant la droite *mm'*.

En résumé, *m* étant un point quelconque du solide et *v* la vitesse de ce point, le mouvement du solide se compose :

1° D'une translation égale à *v*;

2° D'une rotation ω, autour d'une droite A′ passant par le point *m*.

La droite A′ est parallèle à l'axe instantané glissant A. ω est la rotation autour de l'axe A.

La vitesse *v* étant décomposée en deux autres, l'une dirigée suivant la droite A′, l'autre perpendiculaire à cette même droite, la première composante est la vitesse de glissement le long de l'axe A. La deuxième composante est égale au produit de la rotation ω par la distance de l'axe A à la droite A′.

L'axe A est situé dans le plan mené par la droite A′ perpendiculairement au plan de cette droite et de la vitesse *v*.

CHAPITRE VI.

DES FORMES LES PLUS SIMPLES AUXQUELLES ON PEUT RÉDUIRE L'ÉTAT DE MOUVEMENT D'UNE FIGURE DANS L'ESPACE.

—

26. Considérons un système quelconque de points liés entre eux d'une manière invariable, et se mouvant, comme on veut, dans l'espace. Réduit à sa forme la plus simple l'état de mouvement de ce système consiste, en général, en un glissement dirigé suivant une certaine droite et se composant avec une rotation autour de cette même droite. Au lieu d'une translation qui se compose avec une rotation, on peut avoir deux rotations simultanées à axes rectangulaires, quelquefois même une rotation simple. La première substitution est toujours possible d'une infinité de manières, la seconde l'est quelquefois, mais d'une seule façon. Lorsque les points donnés sont tous compris dans un même plan, il y a souvent avantage à distinguer le mouvement du plan sur lui-même du mouvement du plan dans l'espace. On y parvient en ramenant l'état de mouvement du plan mobile à deux rotations simultanées, l'une autour d'une normale au plan, l'autre autour d'un axe situé

dans ce même plan. Lorsque les points donnés sont tous rangés sur une même droite, selon que leurs vitesses sont ou ne sont pas perpendiculaires à cette droite, l'état de mouvement de la droite mobile ne comporte, en général, qu'une simplication secondaire, ou bien il est réductible à une rotation simple autour d'un axe déterminé. Examinons ces différents cas.

Du mouvement d'une droite, dont tous les points ont des vitesses perpendiculaires à cette droite.

27. Soit D une droite projetée en o sur un plan P perpendiculaire à sa direction. Par hypothèse, les vitesses des différents points de la droite D sont perpendiculaires à cette droite [1], et, par conséquent, parallèles au plan P. Il en résulte que si l'on transporte en o les vitesses de ces différents points, leurs extrémités viendront toutes aboutir à une même droite BB′ située dans le plan P. (Théorème VII.) Il en résulte aussi que les vitesses ainsi transportées seront les projections sur le plan P de ces mêmes vitesses considérées dans leurs vraies positions.

Fig. 17.

On sait que les vitesses des différents points de la droite D, lorsqu'on les prend dans leurs vraies positions, ont pour lieu de leurs extrémités une droite oblique sur la première. (Théorème VI, corollaire 2.) Désignons par Δ cette deuxième droite et observons qu'elle est située dans le plan mené par BB′ perpendiculairement au plan P.

De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Il est un point de la droite D dont la vitesse, représentée par la perpendiculaire *oa* abaissée du point o sur BB′, est moindre que toutes les autres.

[1] Lorsque la vitesse d'un point d'une droite est perpendiculaire à la direction de cette droite, il en est de même des vitesses simultanées de tous les autres points. (Théorème VI, corollaire 1.)

Ce point, dit *point central*, est situé sur la plus courte distance des droites D, Δ.

Soit o le point central ainsi déterminé. La droite *oa*, suivant laquelle la vitesse du point *o* se dirige, est dite *axe de symétrie.*

Étant donnés deux points pris sur la droite D et équidistants du point central, les vitesses de ces points ont même grandeur, et elles sont dirigées symétriquement par rapport à la droite *oa.*

L'état de mouvement de la droite D *résulte d'une translation, suivant l'axe de symétrie, avec rotation simultanée autour de ce même axe.*

Soit *on* la projection de la vitesse d'un point quelconque *m* pris sur la droite D, à la distance *om* du point central, les vitesses de translation et de rotation de la droite D sont respectivement, l'une

$$u = oa,$$

l'autre

$$\omega = \frac{an}{om}.$$

Concluons que, *dans le cas particulier où les vitesses des différents points d'une droite sont perpendiculaires à cette droite, l'axe instantané glissant peut être choisi de manière qu'il coupe la droite mobile et lui soit perpendiculaire.*

On observera qu'en ce cas, l'état de mouvement de la droite mobile se trouve ainsi réduit à son expression la plus simple.

D'une droite qui se meut d'une manière quelconque.

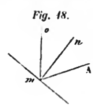
28. Soit *m*A une droite mobile; *m* un point de cette droite; *mn* la vitesse de ce point.

L'état de mouvement de la droite *m*A peut être considéré comme se composant :

1° D'une translation empruntée au point *m* et représentée par la vitesse *mn* de ce point;

2° D'une rotation autour d'un axe mo passant par le point m.

Fig. 18.



Menons par le point m un plan P perpendiculaire à la vitesse mn et décomposons la rotation mo en deux rotations simultanées, l'une autour de la droite mA, l'autre autour de l'intersection du plan P avec le plan omA.

En ce qui concerne la droite mA et la vitesse actuelle de ses différents points, on peut évidemment faire abstraction de la rotation composante dont l'axe est dirigé suivant cette droite.

Il ne reste donc à considérer que la rotation composante autour d'un axe situé dans le plan P et la translation mn. Or cette translation équivaut à un couple de rotation situé dans le plan P. On voit d'ailleurs aisément que ce couple et la rotation à considérer se composent en une rotation simple autour d'un axe situé dans le plan P.

On déduit de là, comme conséquences générales, les conclusions suivantes :

1° *L'état de mouvement d'une droite quelconque* D *se réduit, en général, à une rotation simple autour d'une autre droite* D' (*).

2° *La droite* D' *est située à la fois dans tous les plans menés par les différents points de la droite* D *perpendiculairement aux vitesses de ces points.*

3° *La droite* D' *est complétement déterminée par l'intersection de deux quelconques de ces plans.*

Un seul cas échappe à cette solution, celui où les vitesses des différents points de la droite D sont perpendiculaires à cette droite : c'est le cas traité tout à l'heure n° 27.

La droite D' est nécessairement unique. On la caractérise en lui donnant le nom d'*axe instantané non glissant*. M. Chasles la dé-

(*) Le point de la droite D situé sur la plus courte distance des droites D, D', prend le nom de *point central*. Il est caractérisé par la condition d'être, parmi tous les points de la droite D, celui dont la vitesse est la plus petite en grandeur absolue.

signe sous la dénomination de *droite conjuguée*. Voici pourquoi. Si la droite D fait partie d'un solide, la droite D′, considérée comme faisant partie de ce même solide, ne peut avoir d'autre mouvement que celui qui se compose du mouvement de la droite D et d'une rotation autour de cette droite. Or, puisque le mouvement de la droite D se réduit à une rotation simple autour de la droite D′, il s'ensuit que ce mouvement est sans effet sur la droite D′, et conséquemment que l'état de mouvement de la droite D′ se réduit à une rotation simple autour de la droite D. C'est à raison de la réciprocité qui s'établit ainsi entre les droites D, D′ (chacune étant l'*axe instantané non glissant* qui correspond à l'autre) que M. Chasles leur affecte la désignation commune de *droites conjuguées*.

Du mouvement d'un système de points liés entre eux d'une manière invariable et situés ou non situés dans un même plan.

29. Soient m_1, m_2, m_3 trois points non situés en ligne droite : P le plan déterminé par ces points : v_1, v_2, v_3 leurs vitesses respectives et simultanées.

Décomposons chacune des vitesses v_1, v_2, v_3 en deux autres, l'une perpendiculaire au plan P, l'autre située dans ce plan. Soient v'_1, v'_2, v'_3 les premières composantes et v''_1, v''_2, v''_3 les secondes.

Par les extrémités des vitesses v'_1, v'_2, v'_3 faisons passer un plan Q. En général, les plans P, Q se coupent : soit D leur intersection.

La droite D, ainsi déterminée, n'est autre que la droite désignée par M. Chasles sons le nom de *caractéristique* du plan P. Nous adopterons cette dénomination.

Soient p_1, p_2, p_3 les perpendiculaires abaissées des points m_1, m_2, m_3 sur la caractéristique D. On a évidemment

$$\frac{v_1'}{p_1} = \frac{v_2'}{p_2} = \frac{v_3'}{p_3}.$$

Désignons par w la valeur commune à ces trois rapports. Il s'en-

suit que, pour communiquer à chacun des trois points m_1, m_2, m_3 les vitesses respectives v'_1, v'_2, v'_3, il suffit d'une rotation qui commence autour de la droite D avec la vitesse angulaire w.

On sait que les vitesses v_1, v_2, v_3, prises deux à deux, ont même composante suivant la droite qui joint leurs points d'application. Cette propriété s'étend d'elle-même et nécessairement aux vitesses v''_1, v''_2, v''_3. Il en résulte que les perpendiculaires, élevées dans le plan P sur ces vitesses par les points m_1, m_2, m_3, vont toutes trois se couper en un même point o'. Il en résulte aussi que l'on a, en désignant par r_1, r_2, r_3 les distances $o'm_1$, $o'm_2$, $o'm_3$,

$$\frac{v_1''}{r_1} = \frac{v_2''}{r_2} = \frac{v_3''}{r_3},$$

soit w' la valeur commune à ces trois rapports.

Le point o' déterminé, comme il vient d'être dit, a reçu le nom de *foyer* du plan P. Conservons cette dénomination, et désignons par D' la normale au plan P menée par le point o'.

Il est visible que, pour communiquer à chacun des trois points m_1, m_2, m_3 leurs vitesses respectives v''_1, v''_2, v''_3, il suffit d'une rotation qui commence autour de la droite D' avec la vitesse angulaire w'.

Concluons que *l'état de mouvement des trois points* m_1, m_2, m_3 *peut-être considéré comme résultant de deux rotations simultanées, l'une autour de la droite* D *avec la vitesse* w, *l'autre autour de la droite* D' *avec la vitesse* w'.

Concluons, en outre, que, *s'il s'agit des autres points du plan* P, *ou d'un système quelconque de points faisant avec les points donnés partie d'un même solide, ces deux rotations simultanées communiquent en même temps à tous ces points leurs vitesses actuelles.*

50. Les points situés sur les droites D, D' n'ont d'autres vitesses que celles qui résultent, pour chacune de ces droites, de sa rotation autour de l'autre. Il s'ensuit que les droites D, D' forment entre elles un système de droites conjuguées rectangulaires. Les dé-

ductions et conclusions du n° 29 impliquent, d'ailleurs, les conséquences suivantes :

1° *La caractéristique* D *est le lieu des points dont les vitesses sont dirigées dans le plan* P. *Pour chacun de ces points, sa vitesse est à la fois perpendiculaire et proportionnelle au rayon vecteur qui va du foyer à ce point. Le lieu des extrémités de ces vitesses est l'intersection du plan* P *avec le plan mené par les extrémités des vitesses* v_1, v_2, v_3 [1].

2° *Le foyer* o' *est le point du plan* P *dont la vitesse est normale à ce plan. Cette propriété est caractéristique. Supposée commune à deux points du plan* P, *elle s'étend à tous les autres, et le mouvement se réduit à une rotation simple autour de la droite* D.

3° *Soit* o *le pied de la perpendiculaire abaissée du point* o' *sur la caractéristique* D; o, o' *sont les points centraux des droites conjuguées* D, D'. D' *est la caractéristique du plan* P' *mené par le point* o' *normalement à la droite* D : o *est le foyer de ce plan.*

4° *Tout plan passant par la droite* D *a son foyer sur la droite* D', *et réciproquement.*

5° *Soit* m *un point quelconque du solide,* v *la vitesse de ce point,* Q_1 *un plan mené par le point* m *perpendiculairement à la vitesse* v, *le plan* Q_1 *est le lieu des foyers des plans passant par le point* m.

La plupart de ces propositions ont été énoncées par M. Chasles, dans un article des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, année 1843, tome XVI, page 1420. Nous renvoyons à cet article et à notre *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation*, le lecteur qui voudrait poursuivre ces recherches.

[1] On sait que les vitesses des différents points d'un même plan ont, en général, pour lieu de leurs extrémités, un autre plan non parallèle au premier. Cela résulte évidemment du corollaire 2 du théorème VI.

CHAPITRE VII.

DES MOUVEMENTS ANGULAIRES CONSIDÉRÉS EN EUX-MÊMES ET ISOLÉMENT.

—

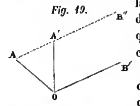
31. L'état de mouvement d'un solide se compose, en général, d'une rotation et d'une translation simultanées.

On peut assujettir à passer par un point quelconque l'axe autour duquel on suppose que la rotation s'établit. Il n'en résulte aucun changement ni dans la direction de cet axe, ni dans la vitesse angulaire. Une seule chose change avec la position de l'axe, c'est la translation composante : elle se détermine par la vitesse que possèdent en commun les différents points situés sur l'axe de rotation.

On voit par là que le mouvement angulaire d'un solide, *lorsqu'on le rapporte à un axe unique*, ne comporte jamais, *à un même instant quelconque*, qu'une seule et même détermination. La déduction précédente s'applique au cas d'un plan comme au cas d'un solide. Lorsqu'il s'agit d'un plan, il est souvent utile de distinguer, dans la rotation totale, les deux rotations simultanées dont elle se compose et qui correspondent respectivement, l'une au mouvement du plan sur lui-même, l'autre au changement que la direction du plan subit dans l'espace. Ces deux rotations ont respectivement pour axes, la première une normale au plan, la deuxième une parallèle à la caractéristique. On peut assigner à chacun de ces axes une position quelconque. Par cela seul qu'ils conservent tous deux leurs directions respectives, rien ne change dans les vitesses angulaires qui leur correspondent.

Passons au cas d'une droite qui se meut librement dans l'espace et dont on considère exclusivement le mouvement angulaire; soit B cette droite : prenons un point quelconque O, supposé fixe, et, par ce point, menons une droite B′ assujettie à rester parallèle à

la droite B. L'identité qui subsiste entre les mouvements angulaires simultanés des droites B, B′ permet de substituer l'un à l'autre et réciproquement; cela posé, voici les conséquences :



L'état de mouvement de la droite B′ consistant en une rotation simple autour d'un axe A passant par le point O, on peut, *sans rien changer à cet état*, établir, en outre, une rotation quelconque autour de la droite B′.

Ces deux rotations, dont l'une est donnée et dont l'autre admet indifféremment tous les degrés de grandeur, se composent en une rotation simple autour d'un axe A′ situé dans le plan des droites A et B′.

La vitesse angulaire autour de l'axe A′ varie avec la direction de cet axe. Elle est la moindre possible, lorsque l'axe A′ est perpendiculaire à la droite B′. Pour toute autre direction, elle croît indéfiniment à mesure que l'angle des droites A′, B′ devient de plus en plus petit [1].

L'axe A′ étant tracé à partir du point O, de manière à représenter la rotation correspondante, le lieu de ses extrémités est une droite B″ parallèle à B′.

Concluons que le mouvement angulaire d'une droite, *lorsqu'on le rapporte à un axe unique*, comporte, *à un même instant quelconque*, une infinité de déterminations différentes, chaque détermination distincte correspondant à une direction particulière de l'axe de rotation, et le lieu de ces directions étant un certain plan parallèle à la droite.

32. Théorème XI. — *Lorsque deux droites font entre elles un angle constant, on peut les considérer comme ayant en même temps mêmes rotations autour des mêmes axes.*

[1] Imaginons que, par l'extrémité de l'axe A, on mène une droite B″ parallèle à B′. La vitesse angulaire autour de l'axe A′ est la partie de la droite A′ interceptée entre le point O et la droite B″.

Soient A, B les deux droites données. Prenons dans l'espace un point quelconque O, et, par ce point, faisons passer deux droites A′, B′ assujetties à rester constamment parallèles, l'une à la droite A, l'autre à la droite B.

Les droites A′, B′ formant entre elles un système de figure invariable, leur état de mouvement consiste, à chaque instant, en une même rotation autour d'un seul et même axe, passant par le point O. De là résulte évidemment la proposition énoncée pour les droites A, B dont le mouvement angulaire ne diffère en rien de celui des droites A′, B′.

Toutes choses restant les mêmes, supposons qu'au lieu d'être constant, l'angle des droites A, B soit incessamment variable. Si nous désignons par P le plan des droites A′, B′, il est visible que le mouvement de chacune de ces droites se compose du mouvement du plan P, qui leur est commun, et, en outre, d'une rotation dans le plan P, autour du point O, cette rotation ayant pour axe la normale au plan P et affectant en général une détermination différente pour chacune des droites A′, B′.

L'état de mouvement du plan P résulte, à chaque instant, d'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point O. On peut dire aussi qu'il résulte de deux rotations simultanées rectangulaires, les axes de ces rotations concourant en O et étant dirigés respectivement, l'un suivant la normale, l'autre suivant la caractéristique du plan P.

De là suit évidemment cette première déduction :

L'état de mouvement des droites A′, B′ *se compose, pour chacune, à un même instant quelconque,*

1° *D'une même rotation autour de la caractéristique du plan* P;

2° *D'une rotation autour de la normale au plan* P *menée par le point* O, *cette rotation affectant en général une détermination différente pour chacune des droites* A′, B′.

Si l'on observe ensuite que le mouvement angulaire des droites A, B, ne diffère en rien de celui des droites A′, B′, on a, comme deuxième déduction, le théorème suivant :

Théorème XII. — *Lorsque deux droites font entre elles un angle incessamment variable, si l'on désigne par* P *un plan parallèle à ces droites, on peut considérer leurs rotations simultanées comme se composant, pour chacune, à un même instant quelconque,*

1° *D'une même rotation autour d'un même axe situé dans le plan* P;

2° *D'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan* P, *cette rotation différant, en général, pour chacune des deux droites.*

La combinaison des théorèmes XI et XII implique, comme conséquence, cette troisième déduction :

Corollaire. — *La rotation commune aux droites* A, B *autour d'un axe situé dans le plan* P *n'est autre chose que la rotation de ce plan autour de sa caractéristique. Elle ne comporte, à un même instant quelconque, qu'une seule et même détermination.*

33. Considérons deux droites mobiles A, B et un plan P parallèle à ces droites. Quelle que soit, pour chacune des droites A, B, sa rotation totale autour d'un axe unique, on peut toujours [1] substituer à cette rotation simple deux rotations simultanées, l'une autour d'un axe perpendiculaire au plan P, l'autre autour d'un axe situé dans ce plan; la première ne comportant qu'une seule détermination, la deuxième admettant, au contraire, une infinité de déterminations toutes équivalentes en ce qui concerne la droite considérée.

Cela posé on a le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Étant donné un plan* P *parallèle à deux droites mobiles* A, B *et, pour chacune de ces droites, sa rotation*

[1] Un seul cas fait exception, celui où l'axe de la rotation donnée serait parallèle au plan P. Cette circonstance ne modifie en rien les déductions suivantes.

composante autour d'un axe situé dans le plan P, *si l'on représente par* oa, ob *les rotations données et par* an, bn *deux parallèles aux droites* A, B, *la rotation de la normale au plan* P *est représentée en direction, sens et grandeur par la diagonale* on *du quadrilatère* oanb.

Construction. — Soit o un point du plan P; *oa*, *ob* deux axes situés dans ce plan et représentant les rotations composantes données, l'une *oa* pour la droite A, l'autre *ob* pour la droite B. Par les points *a* et *b* menons les droites *an*, *bn*, respectivement parallèles, la première à la droite A, la seconde à la droite B : *n* étant le point de rencontre des droites *an*, *bn*, la droite on représente en direction, sens et grandeur la rotation de la normale au plan P.

Fig. 20.

Démonstration. — On sait que le système des droites A, B admet une même rotation composante autour d'un même axe situé dans le plan P. (Théorème XII.) Cette rotation est évidemment représentée par *on*. Cela résulte de ce que la rotation *on* équivaut, pour la droite A, à la rotation *oa*; pour la droite B, à la rotation *ob* [1]. Il est clair, d'ailleurs, que, quelle que soit pour chacune des droites A, B sa rotation composante autour de la normale au plan P, ces rotations peuvent être considérées comme nulles, sans qu'il s'ensuive aucune modification dans le mouvement angulaire de cette même normale. La construction qui précède est ainsi justifiée.

[1] Les rotations représentées respectivement par les portions de droite *oa*, *an* ont pour résultante la rotation *on*. En se composant avec la rotation *oa*, la rotation *an* ne change en rien le mouvement angulaire de la droite A. La même observation s'applique en ce qui concerne, par rapport à la droite B, la rotation *bn*. De là se déduit évidemment la conséquence énoncée plus haut.

CHAPITRE VIII.

RÉSUMÉ GÉNÉRAL ET SIMPLIFICATIONS.

34. En développant, comme nous l'avons fait, les principes exposés ci-dessus, nous avons voulu prévenir toute objection et nous rapprocher autant que possible des errements ordinaires. Nous allons montrer maintenant comment la marche à suivre peut être simplifiée sans que les déductions cessent d'être purement géométriques et tout à fait rigoureuses.

Du mouvement d'un point.

Commençons par le mouvement d'un point. Nous dirons simplement ce qui suit :

Soit *m* le lieu actuel d'un point mobile μ.

Lorsque le point μ sort du lieu *m*, c'est *directement*, c'est-à-dire suivant une certaine direction; c'est, en outre, avec un certain degré de rapidité : cette direction, ce degré de rapidité déterminent l'*état de mouvement*, autrement dit *la vitesse du point μ au sortir du lieu* m.

Le point μ se mouvant, deux cas sont possibles, selon que la direction affectée par ce point à l'origine de chacun de ses déplacements successifs reste constamment la même, ou qu'au contraire, elle est incessamment variable. Dans le premier cas, *et aussi longtemps que la direction ne change point*, la trajectoire décrite est rectiligne; dans le second cas, *et aussi longtemps que la direction ne cesse pas de varier*, la trajectoire décrite est curviligne.

Réciproquement, selon que la ligne à décrire par un point mobile est droite ou courbe, la direction du point décrivant est constante ou bien incessamment variable.

De là résulte la définition suivante :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite

mobile, le point glissant sur la droite, et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment.

On peut aussi poser *à priori* cette même définition. Dans tous les cas, *il est visible* que la vitesse du point décrivant est *dirigée* suivant la droite mobile : c'est pour ce motif que nous donnons à cette droite le nom de *directrice*[1].

Le point qui décrit une courbe étant considéré comme glissant sur la directrice, tandis que la directrice tourne autour de ce point, on démontre aisément qu'aucun segment de droite partant du point mobile ne peut rester compris entre la courbe et la directrice. Il suit de là que, pour chaque position du point décrivant, la directrice se confond avec la *tangente* à la courbe, c'est-à-dire avec la droite qui se rapproche le plus de la courbe dans le voisinage de ce point.

Ces premières notions se résument comme il suit :

La vitesse d'un point est l'état de mouvement qui anime ce point au sortir du lieu qu'il occupe.

[1] Au lieu de procéder par voie de synthèse, on pourrait suivre la voie analytique et arriver, *par induction*, au même résultat. Selon nous, le premier procédé est ici de beaucoup préférable. Quoi qu'il en soit, nous allons indiquer le second.

Une courbe quelconque étant donnée, inscrivons dans cette courbe un premier polygone, puis un second dont les côtés plus petits soient en nombre double, et ainsi de suite indéfiniment.

En général, on ne fait point difficulté d'admettre que le polygone inscrit, dont les côtés croissent en nombre et décroissent en longueur d'une manière indéfinie, a pour limite la courbe circonscrite.

Cela posé, considérons un point *m*, animé d'une vitesse constante, et assujetti à décrire le contour polygonal inscrit dans la courbe donnée. Imaginons d'ailleurs qu'une même droite D, coïncidant d'abord avec le côté du polygone que le point *m* est en train de décrire, tourne brusquement, pour s'appliquer sur le côté suivant, à l'instant précis où le point *m* atteint le sommet correspondant à ces deux côtés et ainsi de suite indéfiniment.

Il est visible que, pendant la description du polygone inscrit, le point *m* se meut uniformément sur la droite D, et que celle-ci reste immobile ou tourne brusquement autour du point *m*, selon que ce point décrit un même côté du

Il y a deux choses à distinguer dans la vitesse d'un point : l'une est la direction, l'autre la grandeur.

La direction est celle de la tangente à la trajectoire du point. Elle comporte deux sens opposés l'un à l'autre.

La grandeur est le degré de rapidité avec lequel le point sort du lieu qu'il occupe.

Du mouvement de plusieurs points.

35. Passons au mouvement simultané de plusieurs points.

Étant donnés plusieurs points qui se meuvent simultanément, considérons les vitesses respectives de ces points à un même instant quelconque déterminé, et ***supposons*** qu'à partir de cet instant, chacune de ces vitesses demeure invariable. ***Dans cette hypothèse,*** chaque vitesse est assujettie à rester ce qu'elle est, c'est-à-dire à conserver la grandeur et la direction qu'elle affecte à l'instant dont il s'agit. La conséquence est qu'à partir de ce même instant, le mouvement de chacun des points donnés devient et demeure ***uniforme.***

polygone ou qu'au contraire, il passe d'un côté au côté suivant, la position qu'il occupe étant celle du sommet compris entre ces deux côtés.

Sans rien changer au mouvement du point m sur la droite D, imaginons que l'on se rapproche indéfiniment de la courbe en augmentant de plus en plus le nombre des côtés du polygone inscrit. Les sommets de ce polygone devenant plus nombreux et se rapprochant indéfiniment les uns des autres, les rotations successives de la droite D autour du point m se succèdent avec une rapidité constamment croissante, et en ne laissant subsister entre elles que des intervalles de plus en plus petits.

Partant de là, on peut conclure, *par voie d'induction*, que la substitution de la courbe au polygone inscrit n'a d'autre effet que de substituer aux rotations intermittentes et brusques de la droite D autour du point m une rotation incessante et, par conséquent, continue.

De là aussi résultent toutes les conséquences relatives au mouvement d'un point sur une courbe. Pour les déduire, il suffit d'observer ce qui se passe sur le polygone inscrit et de considérer comme s'appliquant à la courbe les propriétés qui subsistent toujours les mêmes, indépendamment du nombre des côtés du polygone inscrit, ou qui tendent de plus en plus à s'établir sur ce polygone, à mesure que le nombre de ses côtés croît indéfiniment.

On démontre aisément que, dans le cas où plusieurs points se meuvent avec uniformité, les longueurs que ces points décrivent simultanément conservent entre elles des rapports invariables. Entend-on d'ailleurs par vitesse double, triple, quadruple, etc., la vitesse qui résulte pour un même point de plusieurs vitesses simultanées, toutes égales et prises au nombre de deux, trois, quatre, etc.? on parvient immédiatement aux déductions suivantes :

1° *Lorsque plusieurs vitesses simultanées animent un même point suivant une même direction, la vitesse résultante est la somme algébrique des vitesses composantes.*

2° *Dans la comparaison de plusieurs vitesses, chaque vitesse peut être exprimée par une longueur.*

3° *Les vitesses que l'on compare animant certaints points, les longueurs qui les expriment sont les portions de droite que ces points décriraient simultanément, si chaque vitesse demeurait constante en grandeur ainsi qu'en direction.*

4° *En général, on est libre de fixer comme on veut la portion de droite prise pour mesure de l'une des vitesses qui sont à comparer. Les autres s'en déduisent.*

36. En appliquant les considérations qui précèdent au mouvement simultané de deux points, dont l'un, représenté par μ, décrit une ligne S, et dont l'autre, désigné par p, est la projection du point μ sur un des axes coordonnés, on peut observer que le mouvement du premier point détermine celui du second et réciproquement. Il est visible d'ailleurs qu'à tout mouvement déterminé d'un point correspond, à chaque instant, pour ce point, une vitesse également déterminée.

Ces simples remarques ont pour conséquences immédiates les énoncés suivants :

1° *Lorsqu'à partir d'un instant quelconque déterminé, on assujettit le point μ à conserver la direction et la grandeur de sa vitesse actuelle, rien n'est changé par là dans la vitesse que le*

point p *affecte à ce même instant. La seule modification consiste en ce que les mouvements simultanés du point* μ *et de sa projection* p *deviennent uniformes.*

2° *Les vitesses simultanées des points* p *et* μ *sont telles qu'à chaque instant, l'une est la projection de l'autre.*

De là résultent ensuite toutes les règles relatives à la composition et à la décomposition des vitesses d'un point. Pour établir ces règles, comme déduction directe des énoncés précédents, il suffit de faire observer que si le mouvement d'un point détermine les mouvements simultanés des projections de ce point et réciproquement, de même aussi la vitesse d'un point détermine les vitesses simultanées des projections de ce point et réciproquement.

En résumé, on peut formuler comme il suit la règle générale qui implique toutes les autres :

Règle générale. — *Le point* m *étant animé de* n *vitesses actuelles et simultanées, représentées respectivement en direction, sens et grandeur par* n *portions de droites, placées bout à bout les unes après les autres, la vitesse résultante est représentée en direction, sens et grandeur par la droite qui joint l'origine de la première composante à l'extrémité de la dernière.*

Cette règle admet évidemment la réciproque. On en déduit d'ailleurs celle que nous avons désignée sous le nom de *règle du quadrilatère des vitesses* et dont voici l'énoncé :

Soit v *la vitesse actuelle d'un point* m.

La vitesse v *étant décomposable en une infinité de systèmes distincts, qui comprennent chacun deux composantes, on suppose connues, pour deux de ces systèmes, l'une des composantes et la direction de l'autre.*

Cela posé, si, pour chacun de ces systèmes, on trace, à partir du point m, *la composante connue, et que, par son extrémité, on mène une parallèle à l'autre composante, les deux parallèles se coupent en un point* n, *et la droite* mn *représente en direction, sens et grandeur la vitesse* v *du point* m.

La règle que nous venons de formuler s'étend d'elle-même au cas où les deux systèmes considérés comprendraient un nombre quelconque de composantes qui seraient toutes connues, à l'exception d'une seule, celle-ci d'ailleurs étant déterminée, soit en grandeur, soit en direction.

Du mouvement d'une droite.

37. Étant donnés deux points d'une droite, cette droite est complétement déterminée. De là résultent les principes suivants :

1° *Lorsque les mouvements simultanés des différents points d'une droite sont déterminés pour deux points de cette droite, ils le sont en même temps pour tous les autres points.*

2° *Lorsque les vitesses simultanées des différents points d'une droite sont déterminées pour deux points de cette droite, elles le sont en même temps pour tous les autres points.*

3° *Tout mode de déplacement, qui communique à deux points d'une droite leurs vitesses actuelles et simultanées remplit en même temps cette même condition par rapport à tous les autres points.*

Soient o et m deux points pris comme on veut sur une droite mobile D.

Supposons, en premier lieu, que le point o soit fixe. Dans cette hypothèse, la droite D tourne autour du point o, et la vitesse du point m est dirigée perpendiculairement à la droite D.

Désignons par v la vitesse du point m à un instant quelconque, et par P le plan que la droite D et la direction de la vitesse v déterminent à ce même instant.

En tournant autour du point o dans le plan P, la droite D n'imprime aucune vitesse au point o. Elle peut néanmoins communiquer au point m sa vitesse actuelle v. La conséquence est que les vitesses actuelles et simultanées des différents points de la droite D sont les mêmes que si la rotation s'effectuait uniformément dans le plan P. Concluons que *ces vitesses ont toutes* UNE SEULE ET

MÊME DIRECTION *perpendiculaire à la droite mobile*. Concluons, en outre, qu'*elles sont respectivement proportionnelles aux distances comprises entre les points qu'elles animent et le centre commun de rotation*.

Soit r la distance du point m au point o. Quel que soit le point m, le rapport $\frac{v}{r}$ n'affecte jamais, à un même instant quelconque, qu'une seule et même valeur.

L'état de mouvement d'une droite qui sort du lieu qu'elle occupe, en tournant autour d'un de ses points, est dit *vitesse angulaire* ou *vitesse de rotation*. Cette vitesse peut être constante ou bien incessamment variable. Dans tous les cas, elle est déterminée à chaque instant, d'une part et en direction, par le plan P, d'autre part et en grandeur, par le rapport $\frac{v}{r}$. En la désignant par w, on a généralement

$$w = \frac{v}{r}.$$

S'agit-il d'une droite qui se meut dans l'espace d'une manière quelconque et dont la direction change incessamment? elle a, de même et à chaque instant, une vitesse angulaire complétement déterminée. Cette vitesse est celle d'une droite quelconque, assujettie à passer par un point fixe et à tourner autour de ce point en restant parallèle à la droite donnée.

Supposons, en second lieu, que la droite D soit libre dans l'espace.

Prenons le point o, et, *par une translation qui communique à tous les autres points la vitesse du point* o, assujettissons celui-ci à décrire sa propre trajectoire. L'effet de cette translation, si elle subsistait seule, serait de ne rien changer au mouvement du point o, et, en même temps, de maintenir constante, pour chaque position de la droite D, sa direction première. Il suit de là que, pour restituer à la droite mobile son mouvement effectif, il suffit d'une rotation qui se compose avec la translation empruntée au point o et qui s'accomplisse autour de ce point comme s'il était fixe.

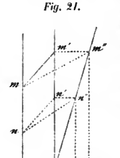
Considérons d'abord la translation empruntée au point o. Les

vitesses qui en résultent sont partout les mêmes à un même instant quelconque. Elles ont donc, en chaque point, *mêmes composantes*, l'une normale à la droite mobile, l'autre dirigée suivant cette même droite.

Considérons ensuite la rotation autour du point *o*, supposé fixe dans la position qu'il occupe à l'instant considéré. Les vitesses qu'elle imprime sont partout normales à la droite D, parallèles entre elles et respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs correspondants.

En résumé, soit *om* la droite D, *oo'* la vitesse actuelle du point *o*, *o'm'* et *mm'* deux segments respectivement égaux et parallèles, l'un à *om*, l'autre à *oo''*. La vitesse du point *m* est la résultante de deux vitesses simultanées, représentées, l'une par *mm'*, l'autre par *m'm''*, le segment *m'm''* étant perpendiculaire à la droite *o'm'* et aboutissant en *m''* à une droite *déterminée* o'm'' [1].

Fig. 21.



De là dérivent immédiatement les déductions suivantes :

1° *Les vitesses simultanées des différents points d'une droite étant décomposées suivant la droite et perpendiculairement à sa direction, les composantes dirigées suivant la droite sont toutes égales et de même sens.*

2° *Lorsqu'un point d'une droite a sa vitesse dirigée perpendiculairement à la droite, il en est de même de tous les autres points.*

3° *Les vitesses simultanées des différents points d'une droite sont toutes parallèles à un même plan. Le lieu de leurs extrémités est une droite oblique sur la première* [2].

[1] Soit *n* un point quelconque de la droite *om*. Si l'on prend *o'n'* = *on*, et que par le point *n'* on mène la droite *n'n''* parallèle à *m'm''* et limitée en *n''* à la droite *o'm''*, le segment *nn''* représente en direction, sens et grandeur, la vitesse actuelle du point *n*.

[2] Le plan, auquel les vitesses simultanées des différents points d'une droite

4° *Si l'on transporte en un même point les vitesses simultanées des différents points d'une droite, ces vitesses ont leurs extrémités sur une seule et même droite perpendiculaire à la première* [1].

5° *Lorsqu'un point d'une droite a sa vitesse dirigée tout entière suivant la droite, les vitesses des autres points sont toutes situées dans un seul et même plan.*

6° *Lorsqu'un point d'une droite a une vitesse nulle, les vitesses des autres points sont parallèles entre elles, perpendiculaires à la droite et respectivement proportionnelles aux distances comprises entre les points qu'elles animent et celui dont la vitesse est nulle.*

Du mouvement d'un plan sur lui-même et d'une droite dans un plan.

58. **Étant donnés deux points d'un plan mobile sur lui-même, la position de tous les points du plan est déterminée [2]. De là résultent les principes suivants :**

1° *Lorsque les mouvements simultanés des différents points d'un plan mobile sur lui-même sont déterminés pour deux points de ce plan, ils le sont en même temps pour tous les autres points.*

2° *Lorsque les vitesses simultanées des différents points d'un plan mobile sur lui-même sont déterminées pour deux points de ce plan, elles le sont en même temps pour tous les autres points.*

3° *Tout mode de déplacement qui communique à deux points*

sont toutes parallèles, est déterminé par deux quelconques de ces vitesses. La figure (21) montre que ce plan est dirigé parallèlement aux droites mm', $m'm''$. Elle montre en même temps que les vitesses mm'', nn'', etc., ont leurs extrémités situées sur la droite $o'm''$.

[1] Si l'on mène par le point o' une droite $o's$ parallèle à $m'm''$ et qu'on transporte en o les vitesses mm'', nn'', etc., il est visible qu'après ce transport, les extrémités m'', n'', etc., viennent se ranger en m''', n''', etc., sur la droite $o's$, les droites $m''m'''$, $n''n'''$ étant toutes parallèles à la droite om.

[2] Dès qu'on se donne une position du plan mobile et qu'il y a continuité dans les déplacements successifs, la détermination est et reste complète.

d'un plan mobile sur lui-même leurs vitesses actuelles et simultanées, remplit en même temps cette même condition par rapport à tous les autres points.

Cela posé, on a d'abord ce premier corollaire :

4° *Si deux points d'un plan qui se meut sur lui-même ont en même temps même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points. Les vitesses simultanées des différents points sont donc toutes les mêmes ou toutes différentes.*

Il est ensuite très-facile d'établir, ainsi qu'on l'a fait aux numéros (11, 12 et 13), les propositions suivantes, qui s'appliquent également au mouvement d'un plan sur lui-même et à celui d'une droite dans un plan :

5° *Lorsqu'un plan se meut sur lui-même et que tous ses points n'ont pas en même temps même vitesse, il est un point du plan dont la vitesse est nulle. On désigne ce point sous le nom de* CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION. *Les vitesses simultanées des autres points sont les mêmes que si le plan tournait autour de ce centre considéré comme fixe.*

6° m, m' *étant deux points d'un plan qui se meut sur lui-même, et* mn, m'n' *les segments de droite qui représentent en direction, sens et grandeur, les vitesses actuelles des points* m, m', *deux cas sont possibles selon que les segments* mn, m'n' *sont ou non parallèles. Dans le premier cas, les segments* mn, m'n' *sont perpendiculaires à la droite* mm', *et le centre instantané de rotation se trouve à la rencontre de cette droite avec la droite* nn'. *Dans le second cas, le centre instantané de rotation est déterminé par l'intersection de deux droites élevées perpendiculairement, l'une en* m *sur* mn, *l'autre en* m' *sur* m'n'.

7° *L'état de mouvement d'un plan qui se meut sur lui-même et dont tous les points n'ont pas même vitesse peut être considéré soit comme se réduisant à une rotation simple autour du centre instantané, soit comme résultant de cette même rotation transportée autour d'un point quelconque du plan mobile et composée*

avec une translation précisément égale à la vitesse de ce point.

8° *Lorsqu'une droite se meut dans un plan, son mouvement se compose d'un glissement sur elle-même, et d'une rotation autour d'un point choisi, comme on veut, sur la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation. Quel que soit ce point, la vitesse angulaire reste toujours la même. La vitesse de glissement est la vitesse effective du point substitué comme centre au centre instantané de rotation.*

Du mouvement dans l'espace d'un plan et d'un solide.

39. Étant donnés trois points d'un solide, non situés en ligne droite, les points de ce solide sont tous déterminés. De là résultent les principes suivants :

1° *Lorsque les mouvements simultanés des différents points d'un solide sont déterminés pour trois points de ce solide non situés en ligne droite, ils le sont en même temps pour tous les autres points.*

2° *Lorsque les vitesses simultanées des différents points d'un solide sont déterminées pour trois points de ce solide non situés en ligne droite, elles le sont en même temps pour tous les autres points.*

3° *Tout mode de déplacement qui communique à trois points d'un solide non situés en ligne droite leurs vitesses actuelles et simultanées remplit en même temps cette même condition par rapport à tous les autres points.*

4° *Lorsque trois points d'un solide ont en même temps même vitesse, cette vitesse est commune à tous les autres points.*

Soit o un point quelconque pris sur un solide qui se meut, ou lié à ce solide d'une manière invariable.

Supposons, en premier lieu, que le point o soit fixe :

m étant un point pris sur le solide en dehors du point o et v la vitesse de ce point, deux cas sont possibles selon que la vitesse v est ou n'est pas nulle.

Dans le premier cas, la vitesse v étant nulle, prenons un point quelconque n situé en dehors de la droite om, et tirons les deux droites on, mn. Ces deux droites ayant chacune un point dont la vitesse est nulle (*), il s'ensuit que la vitesse du point n est perpendiculaire au plan omn, et qu'une rotation commençant autour de la droite om peut communiquer aux trois points o, m, n leurs vitesses actuelles et simultanées. Concluons que *cette rotation remplit en même temps cette même condition par rapport à tous les autres points* [2].

Dans le second cas, la vitesse v est perpendiculaire à la droite om (*), et si l'on désigne par P le plan mené par la droite om perpendiculairement à la vitesse v, on peut considérer ce plan comme lié au solide, ou, ce qui revient au même, comme en faisant partie. Cela posé, soit m' un point quelconque pris dans le plan P, en dehors de la droite om, et v' la vitesse de ce point. La vitesse v' est perpendiculaire à la droite om' (*). D'un autre côté, puisque la vitesse v, dirigée suivant la normale au plan P, est perpendiculaire à la droite mm' située dans ce plan, il s'ensuit que la vitesse v' est aussi perpendiculaire à la droite mm' [3]. Concluons que la vitesse v' est comme la vitesse v perpendiculaire au plan P. La conséquence est que les vitesses des différents points de la droite om' sont toutes perpendiculaires au plan P, et qu'il existe nécessairement sur cette droite un point n dont la vitesse ne diffère en rien de celle du point m (*).

Par le point o menons une droite D parallèle à la droite mn. Il est visible que, pour communiquer aux trois points o, m, n

(*) Lorsqu'un point d'une droite a une vitesse nulle, les vitesses des autres points sont parallèles entre elles, perpendiculaires à la droite et respectivement proportionnelles aux distances comprises entre les points qu'elles animent et celui dont la vitesse est nulle. (N° 37. Déduction 6°.)

[2] Les points o et m ayant des vitesses nulles, la même condition subsiste pour tous les points de la droite om. Partant de là, on pourrait en déduire immédiatement que l'état de mouvement du solide considéré se réduit à une rotation autour de la droite om.

[3] Lorsqu'un point d'une droite a sa vitesse dirigée perpendiculairement à cette droite, il en est de même de tous les autres points. (N° 37. Déduction 2°.)

leurs vitesses actuelles et simultanées, il suffit d'une rotation qui commence autour de la droite D avec une vitesse angulaire égale au rapport de la vitesse v à la distance comprise entre le point a et la droite mn. De là et de ce qui précède résulte la déduction suivante :

3° *Lorsqu'un solide tourne autour d'un point fixe, parmi les droites passant par ce point, il en est une dont l'état actuel de mouvement se réduit à zéro. Cette droite est désignée sous le nom d'*AXE INSTANTANÉ DE ROTATION. *Les vitesses simultanées des différents points du solide sont les mêmes que s'il tournait autour de cet axe, considéré comme fixe.*

Supposons, en second lieu, que le point o participe au mouvement du solide, et désignons par u sa vitesse actuelle.

Si nous communiquons à tous les points du solide la vitesse u du point o, il est visible que l'état de mouvement de ce solide peut être considéré comme se composant d'une translation représentée par la vitesse u et d'une rotation établie autour du point o, comme si ce point était fixe.

Soit D la droite suivant laquelle l'*axe instantané de rotation* serait dirigé, si la rotation établie autour du point o subsistait seule. La vitesse u du point o peut se décomposer en deux autres, l'une u' dirigée suivant la droite D, l'autre u'' perpendiculaire à cette même droite. Il suit de là que l'état de mouvement du solide se compose comme il suit :

Une rotation autour de la droite D;
Un glissement u' suivant la droite D;
Une translation u'' perpendiculaire à la droite D.

Considérons une droite D' parallèle à la droite D, liée au solide et telle que la vitesse communiquée à ses différents points par la rotation établie autour de la droite D soit précisément égale et de sens contraire à la vitesse u''. Il est visible que la droite D' existe nécessairement, qu'elle est unique [1] et que son état de mouvement

[1] La droite D' est située dans le plan mené par la droite D perpendiculairement à la direction de la vitesse u''. La distance de la droite D' à la droite D

consiste tout entier en un glissement sur elle-même, ce glissement ayant lieu avec la vitesse u'. On voit de même qu'en transportant, autour de la droite D', la rotation établie autour de la droite D, on communique aux différents points de celle-ci la vitesse u''. La conséquence évidente est que l'état de mouvement du solide se compose d'une rotation autour de la droite D' et d'un glissement u' suivant cette même droite. De là résulte la déduction suivante, déjà formulée n° 20 :

6° *Lorsqu'un solide se meut et que tous ses points n'ont pas en même temps même vitesse, parmi les droites qu'on peut considérer comme faisant partie de ce solide, il en est une dont l'état actuel de mouvement se réduit à un simple glissement sur elle-même. Cette droite est désignée sous le nom d'*AXE INSTANTANÉ GLISSANT. *Les vitesses simultanées des différents points du solide sont les mêmes que s'il glissait avec cet axe et qu'en même temps il tournât autour de ce même axe.*

Des mouvements angulaires considérés en eux-mêmes et isolément.

40. Nous avons vu (n°s 23, 24, 25) comment les rotations d'un solide autour d'axes quelconques s'expriment par des segments de droites parallèles à ces axes : comment aussi elles se composent et se décomposent suivant les mêmes lois que les vitesses d'un point représentées par ces mêmes segments. Partant de là, on peut établir directement et sans la moindre difficulté toutes les propositions développées dans les numéros suivants. Bornons-nous à reproduire sous une autre forme quelques-unes de ces propositions, et considérons, en particulier, les mouvements angulaires, abstraction faite des translations qui se composent avec eux sans les modifier.

est le quotient de la vitesse u'' par la vitesse angulaire de la rotation établie autour de la droite D. Deux positions correspondent pour la droite D' aux indications qui précèdent : celle qu'il faut choisir est déterminée par le sens de la rotation.

S'agit-il d'un système quelconque de points liés entre eux d'une manière invariable? *Toute rotation de ce système autour d'un axe quelconque peut être transportée autour d'un autre axe, parallèle au premier, et choisi comme on veut.* Si, pour effectuer ce transport, *sans changer l'état de mouvement du système,* il faut introduire une certaine translation, cette translation ne change rien au mouvement angulaire, et l'on peut en faire abstraction, lorsqu'on considère exclusivement celui-ci.

S'agit-il d'un plan? Dans le cas le plus général, l'état de mouvement de ce plan se réduit à une rotation simple autour de *l'axe instantané glissant.* Cette rotation est décomposable en deux autres, l'une autour d'un axe situé dans le plan mobile, l'autre autour d'un axe perpendiculaire à ce même plan. Le glissement qui a lieu suivant l'axe instantané peut se décomposer de la même manière. Il s'ensuit que si l'on combine chacune des deux rotations composantes avec celle des deux composantes de la vitesse de glissement qui lui est perpendiculaire, on a pour résultantes uniques deux rotations simultanées, généralement non concourantes et respectivement établies, l'une autour d'un axe situé dans le plan mobile, l'autre autour d'un axe perpendiculaire à ce même plan. Le premier de ces deux axes n'est autre que la droite désignée (nº 29) sous le nom de *caractéristique;* le second détermine par sa rencontre avec le plan mobile le point appelé *foyer* [1].

[1] On peut, sans rien changer aux positions successives d'un plan qui se meut dans l'espace, supprimer tout mouvement de ce plan sur lui-même. Cela posé, il est aisé de voir que la considération de la caractéristique et du foyer conduit directement aux déductions suivantes :

Tout mouvement d'un plan dans l'espace consiste généralement en une rotation autour d'une droite mobile, dite *caractéristique.*

La caractéristique se meut dans le plan, et le plan tourne autour de la caractéristique, tous deux incessamment.

Le lieu des positions successives de la caractéristique est une surface développable.

Cette surface peut être cylindrique ou conique. En général elle est autre, et dès lors elle a pour arête de rebroussement le lieu des points où les foyers se projettent sur les caractéristiques qui leur correspondent respectivement.

Le plan qui se meut étant, par hypothèse, dépourvu ou dépouillé de tout

Il est souvent utile de considérer à part et exclusivement la *direction* affectée dans l'espace par le plan mobile. Le mouvement angulaire qui correspond aux changements de cette direction se réduit à la rotation composante établie autour de la caractéristique. Il suffit donc de déterminer cette composante et l'on peut faire abstraction de la rotation établie autour de la normale.

S'agit-il d'une droite? Imaginons une autre droite, assujettie à passer par un point fixe o et à rester parallèle à la droite donnée. L'identité qui subsiste entre les mouvements angulaires simultanés de ces deux droites permet de substituer l'un à l'autre, et réciproquement. Tout se réduit donc au mouvement d'une droite qui tourne autour d'un de ses points supposé fixe. Considérons ce dernier mouvement.

Soit *m* un point de la droite mobile, autre que le point *o*, et *v* la vitesse actuelle de ce point. Si nous désignons par Q le plan mené par la droite *om* perpendiculairement à la direction de la vitesse *v*, il est visible que l'état de mouvement de la droite mobile est réductible à une rotation dont l'axe peut être choisi comme on veut parmi toutes les droites tracées dans le plan Q à partir du point o *.

S'agit-il en dernier lieu de deux droites mobiles? Considérons un plan P, assujetti à rester parallèle à ces droites et tournant en conséquence autour de sa caractéristique. La rotation propre à chacune des droites mobiles est décomposable en deux autres, l'une autour d'un axe perpendiculaire au plan P, l'autre autour d'un axe situé dans ce même plan. Cela posé, on peut établir très-simplement le théorème énoncé comme il suit (n° 33):

mouvement sur lui-même, chacun de ses points décrit une trajectoire qui le coupe à angle droit.

Toute droite tracée dans le plan mobile par le point décrivant s'enroule sur le lieu des caractéristiques suivant une développée de la trajectoire de ce point.

* Parmi les droites, en nombre infini, qu'on peut ainsi prendre pour axes instantanés de rotation, une seule est exclue : c'est la droite mobile. La vitesse de rotation change avec la droite choisie pour axe instantané : elle est la moindre possible, lorsque cet axe est pris à angle droit sur la droite mobile.

Étant donnés un plan P *parallèle à deux droites mobiles* A, B, *et, pour chacune de ces droites, sa rotation composante autour d'un axe situé dans le plan* P, *si l'on représente par* oa, ob, *les rotations données, et par* an, bn *deux parallèles aux droites* A, B, *la rotation de la normale au plan* P *est représentée en direction, sens et grandeur par la diagonale* on *du quadrilatère* oanb. *Cela revient à dire que la droite* on *est la caractéristique du plan* P, *et que la rotation de ce plan* P *autour de cette droite est représentée en sens et grandeur par le segment* on.

Fig. 22.

FIN DE LA CINÉMATIQUE ET DE LA PREMIÈRE PARTIE.

DEUXIÈME PARTIE.

RÈGLES GÉNÉRALES DE LA DIFFÉRENTIATION, COMPRENANT, POUR LES CAS LES PLUS SIMPLES, LES RÈGLES CORRESPONDANTES DE L'INTÉGRATION.

CHAPITRE Ier.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

1. Considérons un point mobile dans l'espace. La direction suivie par ce point peut être constante ou bien incessamment variable. Dans le premier cas, la ligne décrite est droite; dans le second cas, la ligne décrite est courbe.

Désignons sous le nom de *directrice* la droite suivant laquelle la vitesse du point mobile est dirigée à l'instant que l'on considère. Si la ligne décrite est droite, la directrice est fixe; si la ligne décrite est courbe, la directrice tourne autour du point décrivant.

De là résulte la définition suivante :

La courbe est la trace d'un point qui se meut suivant une direction incessamment variable,

ou mieux encore :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, dite DIRECTRICE, *le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment.*

En appliquant cette définition à une courbe quelconque, on constate aisément, pour toute position déterminée du point générateur, l'identité de la droite dite *directrice* et de celle qu'on désigne en général sous le nom de *tangente* [1].

[1] Donnons-nous un point sur une courbe et représentons-nous toutes les droites qu'on peut mener par ce point.

La *tangente* étant définie, celle de ces droites dont la courbe s'écarte le moins à partir et dans le voisinage du point donné, on voit tout d'abord qu'elle se confond nécessairement avec la *directrice*. Veut-on d'ailleurs démontrer *à priori* cette proposition ? On y parvient aisément de la manière suivante :

Soit m un point qui décrit une courbe et D la directrice de ce point.

Déterminons d'abord une position quelconque du point décrivant. Soit o cette position prise pour origine de l'arc décrit par le point m et ot la position correspondante affectée par la directrice à cette origine. Par le point o menons une droite on choisie comme on voudra.

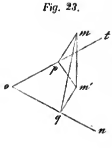


Fig. 23.

Sans rien changer à ce qui précède, considérons le point m après sa sortie du lieu o. Soit m' la projection orthogonale du point m sur le plan not, et p, q celles du point m' sur les droites ot, on. Il est visible que la distance mp du point m à la droite ot est moindre ou plus grande que la distance mq du point m à la droite on, selon que le segment $m'p$ est lui-même moindre ou plus grand que le segment $m'q$.

Désignons par v la vitesse du point m sur sa trajectoire, et par

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

les compléments des angles que la directrice D fait avec les droites $m'p$, $m'q$, à l'instant que l'on considère. En décomposant la vitesse v suivant les trois directions rectangulaires mm', $m'p$, ot, on a, pour composante parallèle à $m'p$, $v \sin. \alpha$. En décomposant cette même vitesse suivant les trois directions rec-

Cela posé, entrons en matière.

Dans la description d'une courbe par un point, le point décrivant peut être considéré comme *glissant sur la directrice* en même temps que *la directrice tourne autour du point décrivant*. La rotation de la directrice autour du point décrivant a pour effet *unique* de changer *incessamment* la direction de ce point : elle n'altère en rien sa *vitesse* considérée comme grandeur, ni l'*étendue linéaire* décrite en vertu de cette même vitesse. De là résultent les relations suivantes existant entre les longueurs décrites *simultanément* sur des lignes quelconques et les vitesses *correspondantes* des points qui décrivent ces longueurs :

1° *Lorsque les vitesses des points décrivants passent en même temps par les mêmes degrés de grandeur, les longueurs décrites simultanément sont constamment égales.*

2° *Lorsque les longueurs décrites simultanément sont constamment égales, les vitesses des points décrivants passent en même temps par les mêmes degrés de grandeur.*

3° *Lorsqu'on compare entre elles, d'une part, des longueurs décrites simultanément sur des lignes quelconques, d'autre part, les grandeurs des vitesses simultanées des points décrivants, on peut, sans altérer en rien les rapports cherchés, substituer à*

tangulaires mm', $m'q$, on, il vient de même, pour composante parallèle à $m'q$, v. sin. β.

Les composantes v sin. α, v sin. β, sont évidemment les vitesses simultanées avec lesquelles croissent les segments $m'p$, $m'q$. En outre, il y a lieu d'observer qu'au sortir du lieu o, on a d'abord et en même temps

$$\alpha = o, \quad \beta = \text{ang. (not.)}.$$

Cela posé, puisque l'angle α commence par être nul, il s'ensuit qu'il reste constamment inférieur à l'angle β pour toute l'étendue d'un certain arc σ, compté, à partir du point o, sur la trajectoire du point m. Or, aussi longtemps que l'angle α reste moindre que l'angle β, la vitesse v sin. α est et demeure plus petite que la vitesse v sin. β. La conséquence évidente est que le segment $m'p$ est *constamment* inférieur au segment $m'q$ pour *toute l'etendue* de l'arc σ, et qu'il en est de même de la distance mp comparée à la distance mq. De là résulte immédiatement la proposition énoncée plus haut.

chaque ligne effectivement décrite une ligne quelconque choisie arbitrairement. Il suffit, pour cela, que, de part et d'autre, dans la première de ces deux lignes et dans celle qu'on lui substitue, les longueurs décrites ou, ce qui revient au même, les vitesses des points décrivants passent en même temps par les mêmes degrés de grandeur.

Ces trois propositions pouvant être considérées comme évidentes, nous nous bornons à les énoncer.

2. Les principes du nº 1 ont pour conséquences immédiates les déductions suivantes :

1° *Lorsque les longueurs décrites en même temps par deux points conservent entre elles un rapport invariable, ce même rapport existe entre les vitesses simultanées de ces points;*

Réciproquement :

2° *Lorsque les vitesses simultanées de deux points conservent entre elles un rapport invariable, ce même rapport existe entre les longueurs que ces points décrivent simultanément* [1].

[1] Soient m et m' les points décrivants, v et v' leurs vitesses respectives simultanées, l et l' deux longueurs quelconques décrites simultanément par ces points et correspondantes aux vitesses v, v'. Il s'agit de démontrer que si l'on a toujours

(1). . . . . $\frac{l}{l'} = \text{constante} = c,$

il en résulte

(2). . . . . $\frac{v}{v'} = \text{constante} = c,$

et réciproquement.

Partons de l'équation (2) et montrons qu'elle implique comme conséquence l'équation (1), et réciproquement.

Soit une circonférence de cercle ayant son centre en o et on pour rayon. Le point o restant fixe, imaginons que le point n se meuve sur la circonférence on, *en même temps et avec la même vitesse* que le point m sur la ligne qu'il décrit. Sur le rayon on, prenons, à partir du point o, une longueur on', telle que l'on ait

$$\frac{on}{on'} = c.$$

On voit aisément que le point n' du rayon on décrit une circonférence de

3° *Soient* m, m′, m″ *trois points décrivants*, v, v′, v″ *leurs vitesses respectives simultanées*, l, l′, l″ *trois longueurs quelconques décrites simultanément par ces points; si, pendant la description de ces longueurs on a toujours*,

$$v = v' + v'',$$

il en résulte,

$$l = l' + l'',$$

et réciproquement (1).

cercle concentrique à la première, et qu'il se meut sur cette circonférence *en même temps et avec la même vitesse* que le point m' sur la ligne qu'il décrit. Il suit de là qu'on peut remplacer les deux lignes données par deux circonférences de cercle concentriques et décrites simultanément par deux points d'un seul et même rayon. Or, en ce qui concerne ces circonférences, la première relation implique évidemment la seconde, et réciproquement. Il en est donc de même relativement aux lignes quelconques décrites simultanément par les points m, m'.

[1] Supposons que l'on ait

$$v = v' + v'',$$

et démontrons qu'il en résulte nécessairement

$$l = l' + l''.$$

Soit une droite D. Imaginons sur cette droite un point n qui s'y meuve *en même temps et avec la même vitesse* que le point m' sur la ligne qu'il décrit. Les longueurs décrites simultanément par le point n sur la droite D, et par le point m' sur sa trajectoire, sont constamment égales. Imaginons, en outre, que la droite D glisse sur elle-même, dans le même sens que le point n, *en même temps et avec la même vitesse* que le point m'' sur la ligne qu'il décrit. Il y a, dès lors, égalité constante entre deux longueurs quelconques décrites simultanément, l'une par le point m'' sur sa trajectoire, l'autre par chacun des points de la droite D. Il s'ensuit aussi que les longueurs décrites par le point n *dans l'espace*, sont constamment égales à la somme des longueurs décrites simultanément par les points m' et m'' sur leurs trajectoires respectives. Eu égard au double mouvement qui l'anime suivant une même direction et dans un même sens, le point n se meut avec une vitesse totale exprimée par la somme $v' + v''$, et par conséquent égale à v. Or, par hypothèse, v est précisément la vitesse du point m sur sa trajectoire. *La conséquence est donc que les longueurs décrites simultanément par les points* m *et* n *sont constamment égales.*

Cela posé, l étant, pour le point m, une de ces longueurs, nous savons

Ces trois propositions se démontrent sans la moindre difficulté, les premières, en considérant deux points assujettis à rester sur un même rayon et à décrire en même temps deux circonférences concentriques; la dernière, en supposant le point m' mobile sur une droite et l'obligeant à s'y mouvoir avec la vitesse v', tandis que la droite glisse sur elle-même avec la vitesse v''.

3. Les notions qui précèdent renferment en principe toute la théorie de la rectification des courbes. Elles s'appliquent de même à la quadrature des aires et à la cubature des solides. Plus généralement encore, elles s'étendent à toutes les opérations désignées sous le nom d'*intégrations*.

Lorsqu'un point décrit une courbe, on peut concevoir un autre point décrivant une droite et supposer que, de part et d'autre, les vitesses des deux points passent, en même temps, par les mêmes degrés de grandeur. La conséquence est que deux longueurs quelconques, décrites simultanément, l'une sur la courbe, l'autre sur la droite, sont toujours égales, et peuvent ainsi se substituer l'une à l'autre. C'est sur ce principe élémentaire que se fonde toute la théorie de la rectification des courbes. En ce qui concerne les quadratures et les cubatures, de même que toutes les autres opérations analogues, il suffit d'un simple artifice pour rendre le même principe immédiatement applicable.

Voici quel est cet artifice.

On prend pour *équivalent numérique* de chacune des grandeurs variables que l'on considère une longueur décrite par un point mobile et composée avec l'unité linéaire comme la grandeur considérée se compose avec son unité propre. Cela fait, tout se réduit à comparer entre elles, d'une part, des longueurs décrites simultanément, d'autre part, les vitesses correspondantes et simultanées des points décrivants.

déjà que l'autre est, pour le point n, la somme des longueurs décrites simultanément par les points m' et m'', c'est-à-dire $l' + l''$. On a donc,

$$l = l' + l'' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La proposition réciproque se démontre de la même manière.



Tant qu'il s'agit des longueurs substituées comme *équivalents numériques* aux grandeurs variables que l'on considère et dont on étudie les variations continues simultanées, les vitesses des points qui décrivent ces longueurs sont de simples vitesses, nettement définies et conçues directement sans la moindre difficulté. D'un autre côté, l'on peut dire de ces mêmes vitesses qu'elles sont *les vitesses d'accroissement* des grandeurs considérées. En général, on les désigne sous le nom de *différentielles* et on les exprime, soit en faisant précéder de la lettre d, soit en surchargeant d'un point le signe représentatif des grandeurs correspondantes; c'est ainsi, par exemple, que si l'on a en vue certaines grandeurs exprimées par les lettres x, y, a, etc., les symboles dx, dy, da, etc., ou $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{a}$, etc., désignent *les vitesses d'accroissement* de ces grandeurs, ou, ce qui revient au même, les vitesses des points qui décrivent les longueurs substituées comme *équivalents numériques* aux grandeurs x, y, a, etc.

4. Précisons davantage ces premières données fondamentales.

Soit x une grandeur quelconque continûment variable et $\dot{x}$ ou dx sa différentielle.

Prenons une droite D et, sur cette droite, à partir d'un point fixe o, une longueur om.

Par hypothèse, la longueur om est l'*équivalent numérique* de la grandeur x, c'est-à-dire qu'elle se compose avec l'unité linéaire comme la grandeur x se compose avec son unité propre. Il en résulte que la longueur om est comme la grandeur x incessamment variable, et, conséquemment, que le point m se trouve assujetti à glisser continûment sur la droite D.

Fig. 24.

o m

Cela posé, la *différentielle* $\dot{x}$ ou dx est la vitesse du point m sur la droite D.

Sans rien changer à ce qui précède, on peut substituer à la droite D une ligne quelconque. On dirait alors et plus généralement :

La différentielle $\dot{x}$ ou dx est la vitesse du point m sur sa trajectoire.

Soit y une autre grandeur quelconque dépendant de la pre-

mière et supposée comme elle incessamment variable. Nous pouvons abréger et de même que nous sommes conduit à résumer comme il suit la définition précédente :

La différentielle $\dot{x}$ *ou* dx *est la vitesse du point qui décrit la longueur substituée comme équivalent numérique à la grandeur* x,

nous dirons simplement :

La différentielle $\dot{y}$ *ou* dy *est la vitesse du point qui décrit la longueur substituée comme équivalent numérique à la grandeur* y.

Cette définition maintenant bien comprise est tout à fait générale.

La variable x est dite *indépendante* lorsqu'on en dispose et qu'on la fait croître ou décroître *uniformément*. En ce cas, la vitesse $\dot{x}$ est *constante* et choisie d'ailleurs comme on veut.

La fonction y dépend, par hypothèse, de la variable x. Il s'ensuit que la vitesse $\dot{y}$ dépend de la vitesse $\dot{x}$, et qu'en général, elle est incessamment variable, alors même que la vitesse $\dot{x}$ est supposée constante.

Partant de là, voici quel est l'objet du *calcul différentiel* proprement dit :

Étant données la variable x *et la fonction* y, *déterminer, pour chaque valeur de la variable* x, *la relation qui s'établit entre les vitesses simultanées correspondantes* $\dot{x}$, $\dot{y}$.

A côté de ce problème vient naturellement se poser le problème inverse :

Étant donnée la relation générale qui subsiste entre les vitesses simultanées $\dot{x}$, $\dot{y}$, *déterminer l'un par l'autre les accroissements simultanés produits par ces vitesses dans les grandeurs correspondantes* y *et* x.

Ce problème inverse peut être considéré comme l'objet du *calcul intégral* réduit à son expression la plus simple.

Ces préliminaires établis, abordons immédiatement l'exposé des règles du calcul différentiel. Chemin faisant, nous indiquerons, pour

les cas les plus simples, comment chacune de ces règles implique, par voie de réciprocité, une règle correspondante du calcul intégral.

5. Nous savons déjà que, sans changer en rien les expressions numériques introduites dans le calcul, on peut appliquer directement aux grandeurs données les résultats obtenus pour des longueurs équivalentes et réciproquement. De là résultent immédiatement les déductions suivantes, où l'on étend à des grandeurs quelconques les relations énoncées nos 1 et 2, en ce qui concerne la description simultanée de plusieurs longueurs et les vitesses correspondantes des points décrivants :

1° c *étant une grandeur constante, la vitesse*[1] $\dot{c}$ *est toujours nulle et réciproquement.*

2° y *étant une grandeur continûment variable, la vitesse* $\dot{y}$ *n'est pas nulle en général; elle est positive ou négative, selon que la grandeur* y *croît ou décroît.*

3° *Lorsqu'il existe entre deux grandeurs incessamment variables,* y *et* x, *un rapport constant* a, *le même rapport s'établit entre les vitesses simultanées* $\dot{x}$ *et* $\dot{y}$. (N° 2, règle 1.)

$$y = ax \quad \textit{donne, en conséquence,} \quad \dot{y} = a\dot{x};$$

4° *Lorsqu'il existe entre les vitesses simultanées* $\dot{y}$, $\dot{x}$ *un rapport constant* a, *le même rapport subsiste entre les accroissements simultanés des grandeurs correspondantes* y *et* x. *Ces accroissements s'expriment en faisant précéder de la lettre* Δ *les signes représentatifs des grandeurs considérées.* (N° 2, règle 2.)

$$\dot{y} = a\dot{x} \quad \textit{donne, en conséquence,} \quad \Delta y = a\Delta x;$$

5° *Lorsqu'il existe entre trois grandeurs incessamment variables,* x, y, z, *une relation telle que l'une soit constamment égale à la somme ou à la différence des deux autres, la même relation subsiste entre les vitesses correspondantes* $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. (N° 2, règle 3.)

$$z = y \pm x \quad \textit{donne, en conséquence,} \quad \dot{z} = \dot{y} \pm \dot{x};$$

[1] Le lecteur ne perdra pas de vue que les mots *vitesse* et *différentielle* sont ici tout à fait synonymes.

6° *Lorsqu'il existe entre les vitesses simultanées* $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ *une relation telle que l'une soit constamment égale à la somme ou à la différence des deux autres, la même relation subsiste entre les accroissements simultanés des grandeurs correspondantes* x, y, z. (N° 2, règle 3.)

$\dot{z} = \dot{y} \pm \dot{x}$ *donne, en conséquence,* $\Delta z = \Delta y \pm \Delta x$;

7° *Les règles* 1, 3, 5 *du présent numéro s'étendent d'elles-mêmes à un nombre quelconque de variables* z, y, x, *etc., combinées ou non avec des constantes* a, b, c, *etc.*

$z = a + by + cx +$ etc. *donne, en conséquence,* $\dot{z} = b\dot{y} + c\dot{x} +$ etc.;

8° *Les règles* 4 *et* 6 *s'étendent de la même manière :*

$\dot{z} = b\dot{y} + c\dot{x} +$ etc. *donne, en conséquence,* $\Delta z = b\Delta y + c\Delta x +$ etc.

Théorème fondamental du calcul différentiel.

6. Avant de poursuivre cette première série d'applications, montrons, en général, comment toute relation établie entre deux grandeurs continûment variables, implique une relation correspondante entre les différentielles de ces mêmes grandeurs, et réciproquement.

Soient deux grandeurs quelconques, fonctions l'une de l'autre, et variant ensemble d'une manière continue.

Considérons ces grandeurs lorsqu'après avoir acquis en même temps l'une la valeur quelconque x, l'autre la valeur correspondante y, elles s'écartent de ces valeurs en variant continûment et simultanément.

Par hypothèse, on a généralement

(1). . . . . $y = f(x)$,

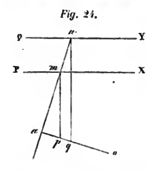
chaque valeur de x déterminant pour y une valeur correspondante, et réciproquement.

Soient Pm, Qn deux longueurs prises à partir des points P et Q

sur deux droites parallèles PX, QY, et substituées, comme équivalents numériques, l'une à la grandeur x, l'autre à la grandeur y.

A chaque position du point m sur la droite PX correspond une position déterminée du point n sur la droite QY. Concevons une droite mobile assujettie à passer constamment par les points m et n, tandis que ces points glissent simultanément l'un sur PX, l'autre sur QY. On sait que tout déplacement d'une droite dans un plan commence, en général, par rotation autour d'un certain point désigné sous le nom de *centre instantané de rotation* [1]. Cela posé, puisque chaque position du point m détermine une position correspondante de la droite mn, il en résulte qu'elle détermine en même temps la position correspondante du point o, centre instantané de rotation de la droite mn.

Fig. 24.



Du centre o abaissons sur la droite mn la perpendiculaire oa. Par les points m et n élevons sur les droites PX, QY deux perpendiculaires mp, nq et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre en p et q avec la droite oa.

A l'origine de son déplacement, la droite mn peut être considérée *indifféremment* soit comme tournant autour du point o avec une certaine vitesse angulaire, soit comme tournant avec cette même vitesse angulaire autour d'un point quelconque de la droite oa, et glissant en même temps sur elle-même avec la vitesse effective du point pris pour centre de rotation.

Soit ω la vitesse angulaire communiquée à la droite mn et correspondante aux vitesses actuelles et simultanées $\dot{x}$, $\dot{y}$ des points m et n sur les droites PX, QY. Tout se passe à l'origine du déplacement comme si la droite mn tournait autour du centre o avec

[1] Voir, au besoin, les numéros 11, 12, 13 de la première partie, pages 37, 38 et suivantes.

la vitesse ω, ou bien que, tournant avec cette même vitesse autour d'un point quelconque de la droite oa, elle glissât en même temps sur elle-même avec une certaine vitesse convenablement déterminée; mais, quelle que soit cette vitesse de glissement, il est visible qu'elle n'altère en rien ni les positions, ni, par conséquent, les vitesses des points m et n sur les droites PX, QY. On peut donc en faire complétement abstraction, et considérer la droite mn comme tournant avec la vitesse ω, soit autour du point p, soit autour du point q.

En prenant le point p pour centre de rotation de la droite mobile mn, il vient immédiatement :

$$\dot{x} = pm.\,\omega.$$

En prenant le point q, on a de même

$$\dot{y} = qn.\,\omega.$$

De là résulte

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{qn}{pm}.$$

Nous savions déjà que les longueurs pm, qn dépendent exclusivement de la position du point m sur la droite PX, c'est-à-dire de la valeur affectée par la grandeur x. La dernière équation nous montre que, pour chaque état particulier de cette grandeur, le rapport des vitesses correspondantes et simultanées $\dot{y}$, $\dot{x}$ affecte, en général, une valeur déterminée et unique.

Concluons que *l'on peut attribuer indifféremment à la vitesse* $\dot{x}$ *une valeur quelconque, constante ou variable. Dans tous les cas, le rapport* $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ *reste toujours le même pour une même valeur affectée par la grandeur* x, *et l'on a généralement*

$$\dot{y} = \dot{x}.\,f'(x),$$

$f'(x)$ *étant une fonction qui dérive de la fonction donnée et qui dépend exclusivement de la variable* x.

La fonction $f'(x)$ prend le nom de *fonction dérivée*. On rappelle



son origine et en même temps on la distingue de la fonction primitive $f(x)$, en lui attribuant la même caractéristique affectée d'un indice.

La quantité $f'(x)$ étant le facteur par lequel il faut multiplier la différentielle $\dot{x}$ ou dx pour obtenir la valeur correspondante de la différentielle $\dot{y}$ ou dy, on la désigne aussi sous le nom de *coefficient différentiel*.

On voit par ce qui précède que *l'objet du calcul différentiel proprement dit peut être considéré comme se réduisant à la détermination de la dérivée d'une fonction quelconque;* à ce point de vue, il se résout en ce qu'on appelle *le calcul des dérivées ou des fonctions dérivées.*

7. Nous venons d'établir que l'équation

(1) . . . . $y = f(x)$

implique comme conséquence générale la relation suivante :

(2) . . . . $\dot{y} = \dot{x} f'(x)$.

Réciproquement étant donnée l'équation

(3) . . . . $\dot{y} = \dot{x}\, \varphi(x)$,

si l'on désigne par $f(x)$ la fonction qui a pour dérivée $\varphi(x)$, on peut en conclure immédiatement :

(4) . . . . $\Delta y = \Delta f(x)$.

En effet, si l'on représente par u la fonction $f(x)$, on a d'abord

$$u = f(x),$$

et par suite

$$\dot{u} = \dot{x}\, f'(x),$$

Mais, par hypothèse, $f'(x)$ est précisément égale à $\varphi(x)$; on peut donc écrire aussi

$$\dot{u} = \dot{x}\, \varphi(x).$$

De là résulte, eu égard à l'équation (3),

$$\dot{y} = \dot{u}.$$

Les vitesses $\dot{y}$, $\dot{u}$ étant toujours égales pour de mêmes valeurs attribuées de part et d'autre à $\dot{x}$ et x, il est évident que la même égalité subsiste nécessairement entre les accroissements simultanés des grandeurs correspondantes y et u. Il vient donc, conformément à la règle (4) du n° 5,

$$\Delta y = \Delta u = \Delta f(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit par là comment la question générale des intégrations, désignées sous le nom de *quadratures*, se ramène à la considération très-simple de trois longueurs Δx, Δy, Δu décrites simultanément par trois points mobiles. A chaque position du point qui décrit la longueur Δx correspond, pour chacun des deux autres points, une seule et même vitesse. La conséquence évidente est que les longueurs Δy et Δu décrites en même temps que la longueur Δx sont constamment égales.

Du procédé général fourni par la méthode des limites pour la détermination des fonctions dérivées.

8. Le procédé que nous allons exposer ne nous est pas nécessaire; néanmoins nous avons plusieurs motifs pour ne pas le passer sous silence. En certains cas, il peut être plus simple ou plus rapide que la voie purement géométrique. Déjà connu des géomètres, il fait immédiatement ressortir la généralité absolue et l'extension sans bornes que comporte notre propre méthode. Il fournit, d'ailleurs, des moyens de contrôle et de vérification qui, s'ils ne sont point indispensables, ont cependant leurs avantages, ne fût-ce qu'à raison des points de vue multiples sous lesquels il convient quelquefois de présenter et de résoudre une même question.

Soit

$$y = f(x),$$

une fonction quelconque supposée continue et dont on se propose de déterminer la dérivée $f'(x)$.

Considérons les longueurs substituées comme équivalents numériques à deux accroissements quelconques simultanés Δy, Δx.

Soient $\dot{y}$, $\dot{x}$, les vitesses simultanées des points qui décrivent ces longueurs.

Si le rapport $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ demeurait invariable à partir de l'origine des accroissements Δy, Δx, on aurait, conformément à la règle (4) du n° 5,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Le rapport $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ n'étant pas en général constant, mais variant au contraire incessamment dans l'intervalle Δx, on peut prendre cet intervalle assez petit pour que le rapport y soit toujours croissant ou toujours décroissant. On peut d'ailleurs, ainsi que nous l'avons vu, attribuer à $\dot{x}$ une valeur constante. Dans tous les cas, si nous représentons par $\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$ la valeur initiale du rapport $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ et par $\Delta\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ le changement subi par ce rapport dans l'intervalle Δx, on a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \mathop{\gtrless}^{<}_{\text{ou}} \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \Delta\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

selon que le rapport $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ croissant ou décroissant dans l'intervalle Δx, la quantité $\Delta\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ est positive ou négative.

On a d'ailleurs en même temps et avec la même évidence

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \mathop{\gtrless}_{\text{ou}} \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}.$$

De là résulte en général

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \mu\Delta\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

μ étant une quantité comprise entre zéro et l'unité.

Cela posé, le rapport $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ étant, par hypothèse, incessamment

variable, il s'ensuit que ce rapport varie continûment, et il suffit de resserrer indéfiniment l'intervalle Δx pour que l'accroissement $\Delta \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ se rapproche indéfiniment de zéro.

L'équation (1) prouve que le rapport des accroissements Δy, Δx comporte, en général, un développement composé de deux parties essentiellement distinctes : la première est indépendante de l'étendue attribuée à l'intervalle Δx; la seconde décroît indéfiniment et converge vers zéro avec cet intervalle. Pour obtenir isolément la première, il faut supprimer dans le développement tous les termes qui dépendent de l'intervalle Δx et qui diminuent avec cet intervalle. Or cette première partie est précisément la dérivée cherchée, et, en général, il suffit d'annuler l'intervalle Δx pour annuler en même temps tous les termes à supprimer. On voit donc aisément comment la recherche de la dérivée d'une fonction se ramène à la formation d'un développement dont on ne conserve que les termes indépendants de la quantité Δx et dont on fait disparaître les autres en annulant cette même quantité.

De là résulte comme expression générale du procédé fourni par la méthode des limites pour la recherche des fonctions dérivées, l'équation fondamentale établie ci-dessus et réductible à la forme suivante :

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x) = \lim.\ \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En écrivant l'équation sous cette forme, il ne faut point perdre de vue que les valeurs simultanées x, $\dot{x}$, $\dot{y}$ sont celles qui correspondent à l'origine des accroissements Δx et Δy.

Détermination géométrique de la limite vers laquelle converge le rapport de deux variables qui tendent en même temps vers zéro.

9. Reportons-nous aux données du n° 6 et considérons en particulier deux positions de la droite mobile, l'une mn supposée quelconque, l'autre PQ correspondante aux deux valeurs simultanées

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Soit i le point où vont se couper les droites mn, PQ. On a évidemment :

$$\frac{Qi}{Pi} = \frac{Qn}{Pm} = \frac{y}{x}.$$

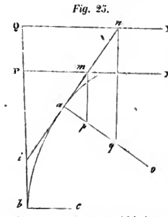


Fig. 25.

Nous savons en quoi consiste, pour la position quelconque mn, l'état de mouvement de la droite mobile. Cet état se compose d'une rotation et d'un glissement simultanés, la droite tournant autour du point a et glissant en même temps sur elle-même. Concevons une deuxième droite assujettie à coïncider toujours avec la droite mobile, mais dépourvue d'ailleurs de tout glissement. Soit D cette autre droite. Il est visible que le point a doit être considéré comme glissant sur la droite D, tandis que la droite D tourne autour du point a, tous deux simultanément et continûment. La conséquence est que le point a décrit, en général, une courbe, et que la tangente à cette courbe, en chaque position du point a, est la position correspondante de la droite mn.

Soit ba la courbe dont il s'agit; c le centre instantané de rotation qui correspond à la position PQ de la droite mobile; b la projection sur PQ du centre c. De même que la courbe ba touche en a la droite mn, de même elle touche en b la droite PQ.

Imaginons que la droite D soit ramenée continûment de la position mn à la position PQ. Les points a et i se déplacent simultanément, l'un sur l'arc ab, l'autre sur la droite PQ, et tous deux finissent en même temps par se confondre en b. Il suit de là que, tandis que les deux longueurs Qn et Pm convergent simultanément vers zéro, leur rapport converge en même temps vers la limite $\frac{Qb}{Pb}$.

Soient $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ les vitesses simultanées des points m et n au sortir

des positions P et Q, on a, conformément aux déductions du n° 6,

$$\frac{Qb}{Pb} = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}.\text{*}$$

De là résulte, en conséquence,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \lim \frac{y}{x} = \frac{Qb}{Pb} = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}.$$

Le principe exprimé par l'équation (1) peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque deux variables convergent simultanément vers zéro, leur rapport converge en même temps vers une certaine limite.

Cette limite est le rapport des valeurs que les différentielles des variables considérées affectent respectivement, lorsque ces variables s'annulent.

Cela posé, étant donné la fonction

$$y = f(x),$$

soient Δx et Δy deux accroissements quelconques simultanés des variables x et y. Quels que soient ces accroissements, ils satisfont toujours et nécessairement à la condition de converger en même temps vers zéro. Concluons que la déduction précédente leur est constamment applicable et qu'elle a, pour traduction algébrique, l'équation générale

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f'(x).$$

* On peut placer les points P et Q sur une même perpendiculaire aux droites PX, QY. Nous n'avons pas supposé qu'il en fût ainsi. Néanmoins, il est aisé de voir que l'équation générale du n° 6 peut, dans tous les cas, s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{qn}{pm} = \frac{an}{am}: \quad \text{on a donc ici} \quad \frac{Qb}{Pb} = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}.$$

Cette équation n'étant autre que l'équation finale du numéro précédent, il est aisé de voir qu'elle implique, en ce qui concerne la recherche des fonctions dérivées par la méthode des limites, le principe et le mode d'application que nous avons exposés ci-dessus.

Règle générale de la différentiation d'un produit.

(*N. B.* La démonstration qui suit peut être remplacée par celle du n° 58, dont elle se déduit immédiatement.)

10. Étant donnée la fonction z égale au produit des deux variables x, y et déterminée par la relation

(1). . . . . $z = xy,$

on demande l'expression de la différentielle $\dot{z}$.

Fig. 26.

Soient oA, oB deux droites menées par le point o. Sur la droite oB prenons deux longueurs om, on, toujours comptées à partir du point o et substituées comme équivalents numériques, la longueur om à la grandeur x, la longueur on à la grandeur y. Sur la droite oA prenons oa égal à l'unité. Tirons la droite am et par le point n menons la droite nr, de manière que l'angle orn soit et demeure constamment égal à l'angle oma.

Les grandeurs x, y étant, par hypothèse, incessamment variables, il s'ensuit que les points m et n glissent simultanément sur la droite oB et qu'en conséquence, les droites am, nr se trouvent respectivement assujetties, la première à tourner autour du point a en passant constamment par le point m, la seconde à glisser le long de la droite oB avec le point n et à tourner en même temps autour de ce point de manière à ce que l'égalité des angles variables oma, orn ne cesse jamais d'avoir lieu.

En désignant par z la longueur *or*, on voit aisément que les triangles *oam*, *onr*, *toujours semblables*, fournissent la relation constante

$$z = xy.$$

Cela posé, il s'agit de déterminer la vitesse $\dot{z}$ avec laquelle le point r glisse sur la droite oA, tandis que les points m et n glissent en même temps sur la droite oB, le premier avec la vitesse quelconque $\dot{x}$, le second avec la vitesse également quelconque $\dot{y}$.

Soit mm' une longueur prise à partir du point m, sur la droite oB et égale à $\dot{x}$. Par les points m' et m menons deux droites, l'une $m'm''$, parallèle à ma, l'autre mm'', normale à la première.

En désignant par ω la vitesse angulaire que la vitesse $\dot{x}$ du point m communique à la droite am, dans la rotation de cette droite autour du point a, et par $\mathfrak{C}$ l'angle oma, il vient

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \omega = \frac{mm''}{am} = \frac{\dot{x} \sin \mathfrak{C}}{am}.$$

Par hypothèse, la droite nr tourne autour du point n avec la vitesse ω, et, en même temps, elle est entraînée par le point n qui glisse sur la droite oB avec la vitesse $\dot{y}$. De là résultent pour la droite nr deux mouvements simultanés, mais distincts et susceptibles d'être considérés séparément, l'un de rotation, l'autre de translation, tous deux d'ailleurs complétement définis.

Représentons par $\dot{z}_r$ la vitesse que la rotation de la droite nr autour du point n communique au point r sur la droite oA. L'angle *orn* étant égal à l'angle *ona* et, par conséquent, à $\mathfrak{C}$, supposons la longueur rr', prise sur oA, égale à $\dot{z}_r$ et par les points r', r menons deux droites, l'une $r'r''$, parallèle à rn, l'autre rr'', normale à la première. Le triangle $rr'r''$ semblable au triangle $mm'm''$ donne, comme tout à l'heure,

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \omega = \frac{rr''}{nr} = \frac{\dot{z}_r \sin \mathfrak{C}}{nr}.$$

La combinaison des équations (2) et (3) fournit pour $\dot{z}_x$ la valeur suivante :

$$(4) \quad \dot{z}_x = \frac{nr}{am}\,\dot{x} = \frac{on}{oa}\,\dot{x} = y\dot{x}.$$

Représentons par $\dot{z}_y$ la vitesse que la translation de la droite nr communique au point r sur la droite oA. Cette translation résultant de la vitesse $\dot{y}$ avec laquelle le point n de la droite nr glisse sur la droite oB, on a évidemment

$$(5) \quad \dot{z}_y = \frac{or}{on}\,\dot{y} = \frac{om}{oa}\,\dot{y} = x\dot{y}.$$

Ajoutant les expressions (4) et (5) des deux composantes de la vitesse cherchée $\dot{z}$, on trouve immédiatement

$$(6) \quad \dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y = y\dot{x} + x\dot{y}.$$

Ce résultat s'étend de lui-même au produit d'un nombre quelconque de facteurs. On peut l'énoncer comme il suit :

La différentielle d'un produit est la somme des différentielles qu'on obtient en opérant successivement sur chacun des facteurs variables comme s'il variait seul, les autres étant constants.

Dans le cas particulier de deux facteurs dont le produit est constant, on a

$$\dot{z} = o,$$

et par suite

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{y}{x},$$

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque deux grandeurs continûment variables ont un produit constant, leur rapport, changé de signe, devient celui de leurs différentielles.

Règle générale de la différentiation d'un quotient.

11. En appliquant les déductions qui précèdent à la relation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{z}{x},$$

on peut écrire immédiatement, comme conséquences des équations (1) et (6) du n° 10,

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \dot{y} = \frac{1}{x}(\dot{z} - y\dot{x}) = \frac{x\dot{z} - z\dot{x}}{x^2}.$$

De là résulte la règle générale énoncée comme il suit :

La différentielle d'un quotient s'obtient en soustrayant du produit du dénominateur par la différentielle du numérateur le produit du numérateur par la différentielle du dénominateur et en divisant le tout par le carré du dénominateur.

Dans le cas particulier où le numérateur du quotient donné est constant, la règle prend cet autre énoncé :

La différentielle du quotient d'une constante divisée par une variable s'obtient en formant le produit du numérateur par la différentielle du dénominateur, changeant ce produit de signe et le divisant par le carré du dénominateur.

Les règles établies dans ce numéro et dans celui qui précède sont d'un fréquent usage. Il importe de se familiariser avec elles, et plus généralement de s'exercer à la différentiation, comme on s'exerce au calcul en arithmétique et en algèbre, par des applications multipliées.



CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

1° *Fonctions algébriques.*

12. Étant donnée la fonction algébrique

(1). . . . . $y = x^m$,

on demande de déterminer la différentielle $\dot{y}$.

Supposons d'abord que l'exposant m soit positif et entier. x^m est, en ce cas, le produit de m facteurs tous égaux à x. De là résulte immédiatement, d'après la règle générale exposée n° 10,

(2). . . . . . . $\dot{y} = m.x^{m-1}.\dot{x}$.

Supposons maintenant que l'exposant m soit positif et fractionnaire. En le représentant par $\frac{p}{q}$, on a

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

et par suite

$$y^q = x^p.$$

De là résulte, en vertu de l'équation (2),

$$qy^{q-1}\dot{y} = yx^{p-1}.\dot{x},$$

et conséquemment

$$\dot{y} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}.\,\dot{x} = mx^{m-1}.\,\dot{x}.$$

Supposons, en dernier lieu, que l'exposant m soit négatif, entier

ou fractionnaire. En le désignant par — n, on a

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

De là résulte, d'après la règle du nº 11 et conformément à l'équation (2) du présent numéro,

$$\dot{y} = -\frac{n.x^{n-1}.\dot{x}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\dot{x} = mx^{m-1}\dot{x}.$$

Concluons que, quel que soit l'exposant m, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, commensurable ou incommensurable [1], la fonction algébrique

$$y = x^m$$

a constamment pour différentielle

$$\dot{y} = mx^{m-1}.\dot{x}.$$

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit, sous forme de règle générale:

La différentielle d'une puissance s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en introduisant comme facteurs, d'une part, l'exposant primitif, d'autre part, la différentielle de la quantité soumise à l'exposant.

15. Le résultat établi ci-dessus conduit directement et par voie de réciprocité à la déduction suivante :

Étant donnée la relation

(1). . . . . . . $\dot{y} = cx^{m-1}.\dot{x}$,

où c *est une constante, il suffit d'observer que le produit* $cx^{m-1}.\dot{x}$

[1] La proposition établie pour une valeur quelconque fractionnaire de l'exposant m, s'étend d'elle-même au cas d'une valeur quelconque incommensurable.

est la différentielle de la fonction $c\frac{x^m}{m}$ *pour en conclure d'une manière générale, conformément au principe exposé* n° 7,

$$(2). \quad \ldots \ldots \quad \Delta y = \frac{c}{m}\,\Delta(x^m).$$

On observera que l'équation (1) ne peut être considérée comme résultant de la différentiation d'une fonction algébrique de la forme $y=Ax^m$, qu'autant que l'exposant m affecte une valeur quelconque positive ou négative. Dans le cas particulier et unique où l'on supposerait l'exposant m égal à zéro, la fonction x^m se réduisant à l'unité et cessant, par conséquent, d'être variable, il est visible qu'elle ne peut correspondre à la différentielle $c\,\frac{\dot{x}}{x}$. De là vient que la formule (2) est alors en défaut et que la différentielle $\dot{y}=c\,\frac{\dot{x}}{x}$ exige une recherche particulière de la fonction dont elle dérive.

2° *Fonctions logarithmiques.*

Première solution.

14. Le problème que nous avons à résoudre d'après ce qui précède et dans l'ordre naturel des déductions, peut s'énoncer comme il suit :

On conçoit une fonction de la variable x, *telle que sa différentielle ait pour expression générale* $c\frac{\dot{x}}{x}$, c *étant une constante. Partant de là, il s'agit de déterminer quelle est cette fonction.*

Soit y la fonction cherchée. On a, par hypothèse,

$$(1). \quad \ldots \ldots \quad \dot{y} = c\,\frac{\dot{x}}{x}.$$

Considérons en même temps deux valeurs de x, continûment croissantes ou décroissantes, et liées entre elles de manière à conserver un rapport constant m.

Les vitesses simultanées des points qui décrivent les longueurs

substituées comme équivalents numériques à ces deux valeurs conservent entre elles le même rapport constant m. (N°2, règle 1.) Il en résulte pour la vitesse $\dot{y}$ deux valeurs simultanées, constamment égales, puisqu'elles sont exprimées respectivement, la première par

$$\dot{y} = c\,\frac{\dot{x}}{x},$$

la seconde par

$$\dot{y} = c\,\frac{m\dot{x}}{mx} = c.\,\frac{\dot{x}}{x}.$$

La conséquence évidente est qu'un seul et même accroissement de la fonction y correspond à chacun des intervalles déterminés pour la variable x par deux quelconques des termes qui se succèdent immédiatement dans la suite indéfinie

$$\ldots\ldots\quad m^{-3}\quad m^{-2}\quad m^{-1}\quad 1\quad m\quad m^{2}\quad m^{3}\quad\ldots\ldots$$

Désignons par n cet accroissement et faisons correspondre à la valeur $x = 1$ la valeur $y = 0$. Si nous rangeons sur deux lignes les valeurs de x et de y, en plaçant les unes au-dessus des autres celles qui se correspondent respectivement, il est visible que nous aurons les deux suites

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots\ldots & m^{-3} & m^{-2} & m^{-1} & 1 & m & m^{2} & m^{3} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & -3n & -2n & -n & 0 & n & 2n & 3n & \ldots\ldots \end{array}$$

Concluons que la fonction y est un logarithme et que l'on a, en conséquence,

(2). . . . . $y = \log.\ x.$

Dans le cas particulier où la constante c est égale à l'unité, les logarithmes correspondants prennent le nom de *logarithmes népériens* [1]. On distingue ces logarithmes en leur affectant pour

[1] On les désigne aussi sous le nom de *logarithmes naturels*, ou bien encore

caractéristique la lettre l, et en désignant leur base par la lettre e. De là résulte en général

(3). . . . . . . $y = \log x = c.lx,$

et conséquemment

(4). . . . . . . $c = \log e.$

On voit ainsi que la constante c est le logarithme de la base e * dans le système exprimé par la caractérisque *log*.

Deuxième solution.

15. Procédons directement en nous appuyant sur le théorème fondamental exposé n° 6.

Soit la fonction logarithmique

(1). . . . . $y = \log x.$

a étant une constante quelconque, posons

(2). . . . . $z = ax,$

il vient en substituant

(3). . . . . $y = \log x = \log z - \log a.$

De là résulte, en désignant par $log'x$ la fonction dérivée de

de *logarithmes hyperboliques*, bien que cette dernière dénomination paraisse également applicable à tous les systèmes.

* Nous montrerons plus loin comment on parvient très-simplement à la relation générale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et, par suite, à la valeur

$$e = 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.} = 2{,}7182818288459\,\ldots..$$

$log x$, en appliquant le théorème fondamental du n° 6, et en ayant égard à l'équation (2) :

(4) . . . $\dot{y} = \dot{x} \log' x = \dot{z} \log' z = a\dot{x} \log' z = a\dot{x} \log' ax.$

L'équation (4) donne, en général,

(5) . . . . $a \log' ax = \log' x,$

et, pour $x = 1$,

(6) . . . $a \log' a = \log' 1 = \text{constante} = c.$

Le nombre a étant quelconque, nous pouvons le remplacer par x et écrire, comme conséquence de l'équation (6),

(7) . . . . $\log' x = \frac{c}{x}.$

Il suit de là qu'étant donnée la fonction logarithmique

(8) . . . . $y = \log x,$

on a, pour expression générale de la différentielle $\dot{y}$,

$$\dot{y} = c \, \frac{\dot{x}}{x}.$$

16. La considération des logarithmes conduit très-simplement à la différentielle de la fonction x^m *; soit, en effet,

(1). . . . . $y = x^m.$

* Cette considération conduit non moins simplement à la différentielle d'un produit ou d'un quotient; soit, par exemple,

(1). . . . . $z = x.y,$

On en déduit

(2). . . . . $lz = lx + ly,$

et par suite

(3). . . . . $\frac{\dot{z}}{z} = \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y}.$

De là résulte, en multipliant, membre à membre, la première et la dernière

De là résulte, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$ly = mlx.$$

et par suite

$$\frac{\dot{y}}{y} = m\,\frac{\dot{x}}{x}.$$

Il vient donc immédiatement

(2). . . . . . $\dot{y} = my\,\dfrac{\dot{x}}{x} = m.x^{m-1}.\,\dot{x}.$

Si les variables x, y étaient toutes deux négatives, ou que la variable x le fût seule, on pourrait changer leur signe sans altérer en rien l'équation (1). Le résultat obtenu est donc tout à fait général, bien qu'établi dans l'hypothèse où x et y seraient tous deux positifs.

3° *Fonctions exponentielles.*

17. Soit la fonction exponentielle

(1) . . . . $y = a^x.$

En prenant les logarithmes népériens des deux membres de l'équation (1), on a

(2). . . . . $ly = x.la.$

De là résulte, conformément à ce qui précède,

(3). . . . . $\dfrac{\dot{y}}{y} = \dot{x}la.$

de ces trois équations,

$$\dot{z} = y\dot{x} + x\dot{y}$$

On voit ainsi comment il suffit de recourir au théorème fondamental du n° 6, pour en déduire, en quelques lignes, toutes les différentielles obtenues successivement dans ce qui précède.



Il vient donc, en général,

(4). . . . . $\dot{y} = y\dot{x}\,la = a^x.\dot{x}\,la,$

et, pour le cas particulier où la base a serait égale au nombre e, base du système des logarithmes népériens :

(5). . . . . $\dot{y} = e^x.\dot{x}$ *.

18. Les résultats obtenus pour les différentielles des logarithmes et des exponentielles conduisent, directement et par voie de réciprocité, aux déductions suivantes :

1° Étant donnée la relation

$$\dot{y} = c\,\frac{\dot{x}}{x},$$

où c est une constante, il suffit d'observer que l'expression $c\,\frac{\dot{x}}{x}$ est la différentielle de la fonction $c\,lx$, pour en conclure d'une manière générale :

$$\Delta y = c\Delta lx.$$

* La fonction e^x étant supposée développable en série convergente, on peut écrire

$$e^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{etc.}$$

De là résulte, en différenciant et supprimant le facteur $\dot{x}$,

$$e^x = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \text{etc.}$$

Les deux valeurs, ainsi trouvées pour e^x, donnent l'identité

$$1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{etc.} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \text{etc.}$$

On déduit de là

$$A_1 = 1,\ A_2 = \frac{1}{1.2},\quad A_3 = \frac{1}{1.2.3},\quad A_4 = \frac{1}{1.2.3.4}\ \text{etc.},$$

et par suite

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

2° Étant donnée la relation

$$\dot{y} = ca^x.\dot{x},$$

où c et a sont des constantes, il suffit d'observer que le produit $ca^x.\dot{x}$ est la différentielle de la fonction $\frac{c}{la}\,a^x$ pour en conclure, comme tout à l'heure,

$$\Delta y = \frac{c}{la}\,\Delta a^x.$$

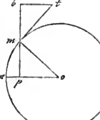
4° Fonctions circulaires, directes et inverses.

19. Les fonctions élémentaires qui nous restent à considérer sont les fonctious circulaires directes et inverses. Commençons par les fonctions directes, et soit, d'abord,

(1). . . . . $y = \sin. x.$

Sur la circonférence d'un cercle ayant l'unité pour rayon, et son centre en o, prenons l'arc $am = x$. Menons les rayons oa, om. Par le point m abaissons sur oa la perpendiculaire $mp = \sin. x$, et tirons la tangente mt.

Fig. 27.



L'arc x engendré par le point m, étant supposé croissant, prenons mt pour représenter, en direction, sens et grandeur, la vitesse totale $\dot{x}$ qui anime le point m au sortir de sa position actuelle.

Si du point t nous abaissons sur le prolongement de pm la perpendiculaire tb, mb sera la composante de la vitesse $\dot{x}$ dirigée suivant ce prolongement. Or, cette composante n'est autre chose que la vitesse $\dot{y}$: il vient donc

$$\dot{y} = mb,$$

et, comme on a déjà

$$\dot{x} = mt,$$

il en résulte immédiatement

$$\dot{y} = \frac{mb}{mt}\,\dot{x} = \dot{x}.\ \cos\ x.$$

20. Soit, en second lieu,

(1). . . . . $y = \cos\ x.$

Sans rien changer à ce qui précède, on a $po = cos x$, et l'on voit que, dans le triangle mbt, le côté bt représente en direction, sens et grandeur la composante de la vitesse $\dot{x}$ parallèle au rayon oa. Il s'ensuit que cette composante est la vitesse du point p sur ce même rayon, c'est-à-dire $\dot{y}$. Observant que la vitesse $\dot{y}$ est négative, puisque le cosinus y diminue tandis que l'arc x augmente, il vient

$$\dot{y} = -\ bt,$$

on a d'ailleurs comme ci-dessus,

$$\dot{x} = mt.$$

De là résulte

$$\dot{y} = -\ \frac{bt}{mt}\,\dot{x} = -\ \dot{x}\,\sin\ x.$$

21. Soit, en troisième lieu,

(1). . . . . $y = \text{tg.}\ x.$

Fig. 28.

Prolongeons le rayon om jusqu'à sa rencontre en n avec la perpendiculaire élevée en a sur le rayon oa; an et on sont respectivement la tangente et la sécante de l'arc x. Lorsque cet arc augmente par le déplacement continu du point m sur la circonférence am, le point n glisse le long de ah, de n vers h : soit nh la vitesse actuelle qui correspond à ce glissement. Cette vitesse est évidemment la vitesse $\dot{y}$ qu'il s'agit de déterminer. Elle se décompose en deux vitesses simultanées, ne, he,

l'une perpendiculaire au rayon prolongé *on*, l'autre dirigée suivant ce même rayon.

La composante *ne* étant la vitesse communiquée au point *n* du rayon *on* par la rotation de ce rayon autour du centre o, et $\dot{x}$, celle qui anime simultanément le point *m* dans cette même rotation, on a,

$$\dot{x} = \frac{ne}{on}{}^{*},$$

mais déjà, et en même temps, l'on a

$$\dot{y} = nh.$$

Il vient donc

(2) . . . . . . $\dot{y} = \dot{x}.on.\ \dfrac{nh}{ne} = \dfrac{\dot{x}}{\cos^2 x}.$

S'il s'agissait de la fonction,

(3). . . . . $y = \cot.\ x.$

On aurait, soit en opérant de même et observant qu'en ce cas, la vitesse $\dot{y}$ est négative, soit en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$ dans les résultats qui précèdent :

$$\dot{y} = -\ \frac{\dot{x}}{\sin^2 x}.$$

22. Soit, en dernier lieu,

(1) . . . . $y = \sec.\ x.$

En se reportant au n° **21**, on voit immédiatement que la vitesse du point *n* sur le rayon *on* est représentée en direction, sens et grandeur par *eh*. On a donc

$$\dot{y} = eh.$$

On a d'ailleurs, comme précédemment,

$$\dot{x} = \frac{ne}{on}.$$

* On ne perdra pas de vue que, par hypothèse, le rayon de l'arc x est égal à l'unité.

Il vient donc

$$(2) \ldots \quad \dot{y} = \dot{x}.on.\ \frac{eh}{ne} = \dot{x} \sec x.\ \mathrm{tg}\, x.$$

S'il s'agissait de la fonction

$$(3) \ldots\ldots \quad y = \mathrm{cosec}\, x.$$

On aurait, soit en opérant de même et observant qu'en ce cas, la vitesse $\dot{y}$ est négative, soit en remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$ dans les résultats qui précèdent,

$$(4) \ldots\ldots \quad \dot{y} = -\ \mathrm{cosec}\, x.\ \cot x.$$

23. En résumé :

$y = \sin x$	donne	$\dot{y} = \dot{x} \cos x$,
$y = \cos x$	......	$\dot{y} = -\dot{x} \sin x$,
$y = \mathrm{tg}\, x$	......	$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{\cos^2 x}$,
$y = \cot x$	......	$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{\sin^2 x}$,
$y = \sec x$	......	$\dot{y} = \dot{x}.\ \mathrm{tg}\, x \sec x$,
$y = \mathrm{cosec}\, x$	......	$\dot{y} = -\dot{x}\ \mathrm{cosec}\, x.\ \cot x$.

Réciproquement, et conformément aux règles des nos 5 et 7,

$\dot{y} = \dot{x} \cos x$	donne	$\Delta y = \Delta \sin x$,
$\dot{y} = -\dot{x} \sin x$	......	$\Delta y = \Delta \cos x$,
$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{\cos^2 x}$	......	$\Delta y = \Delta\ \mathrm{tg}\, x$,
$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{\sin^2 x}$	......	$\Delta y = \Delta \cot x$,
$\dot{y} = \dot{x} \sec x\ \mathrm{tg}\, x$	......	$\Delta y = \Delta \sec x$,
$\dot{y} = -\dot{x}\ \mathrm{cosec}\, x.\ \cot x$	......	$\Delta y = \Delta\ \mathrm{cosec}\, x$.

24. Considérons actuellement les fonctions circulaires inverses, et soit, d'abord,

$$(1) \ldots\ldots \quad y = \mathrm{arc}\ \sin x.$$

De là résulte

$$x = \sin y,$$

et par suite

$$\dot{x} = \dot{y} \cos y = \dot{y} \sqrt{1-x^2}.$$

Il vient donc :

$$(2) \quad \dots\dots \quad \dot{y} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on voulait opérer directement, il suffirait de se reporter au n° 19. On observerait que, dans le cas dont il s'agit ici, on a, d'une part,

$$\dot{y} = mt,$$

et, d'autre part,

$$\dot{x} = mb.$$

De la résulte immédiatement

$$\dot{y} = \dot{x}\,\frac{mt}{mb} = \frac{\dot{x}}{po} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

25. Les procédés du n° 24 s'appliquent, de la même façon, aux autres fonctions circulaires, inverses des premières. Bornons-nous à résumer les résultats dans les tableaux suivants :

$y = \text{arc sin } x$	donne	$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$,
$y = \text{arc cos } x$	......	$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$,
$y = \text{arc tg } x$	......	$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{1+x^2}$,
$y = \text{arc cot } x$	......	$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{1+x^2}$,
$y = \text{arc sec } x$	......	$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{x\sqrt{x^2-1}}$,
$y = \text{arc cosec } x$	......	$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Réciproquement, et conformément aux règles des nos 5 et 7,

$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ donne $\Delta y = \Delta$ arc sin x,

$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ . . . . . . $\Delta y = \Delta$ arc cos x,

$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{1+x^2}$ . . . . . . $\Delta y = \Delta$ arc tg x,

$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{1+x^2}$ . . . . . . $\Delta y = \Delta$ arc cot x,

$\dot{y} = \dfrac{\dot{x}}{x\sqrt{x^2-1}}$ . . . . . . $\Delta y = \Delta$ arc sec x,

$\dot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{x\sqrt{x^2-1}}$ . . . . . . $\Delta y = \Delta$ arc cosec x.

CHAPITRE III.

EXTENSION GÉNÉRALE DES RÈGLES ÉTABLIES POUR LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Différentielles des fonctions de fonction.

26. Soit une fonction quelconque

$$y = f(x).$$

De là résulte, en général,

$$\dot{y} = f'(x).\ \dot{x}.$$

La fonction $f'(x)$ est complétement déterminée par cela seul qu'elle exprime, pour une fonction donnée, $y = f(x)$, le rapport des vitesses correspondantes et simultanées $\dot{y}$, $\dot{x}$. Elle prend, par

rapport à la fonction dont elle dérive ainsi, le nom de *fonction dérivée*. On rappelle son origine et en même temps on la distingue de la fonction primitive, en lui attribuant la même caractéristique affectée d'un accent.

Cela posé, soit y une fonction de x déterminée par les équations simultanées

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x).$$

De là résulte

(1). . . . . . . $y = F[\varphi(x)],$

et il s'agit d'établir la relation existant entre les vitesses simultanées $\dot{y}$, $\dot{x}$. On a directement,

$$\dot{y} = F'(u)\,\dot{u}, \quad \dot{u} = \varphi'(x).\,\dot{x},$$

et, par suite,

(2). . . . . . $\dot{y} = F'(u).\,\varphi'(x)\,\dot{x}.$

Ce résultat peut s'exprimer généralement comme il suit :

La différentielle d'une fonction de fonction s'obtient en prenant la dérivée de la fonction principale par rapport à la fonction secondaire considérée comme simple variable, et en multipliant cette dérivée par la différentielle de la fonction secondaire.

La règle que nous venons de formuler s'étend d'elle-même au cas où la fonction dite *secondaire* serait une fonction de fonction, et, ainsi de suite indéfiniment.

Différentiation des fonctions composées [1].

NB. — Au lieu de procéder comme il suit, il est plus simple de passer les nos 27, 28, et d'intercaler, à leur place, le no 38.

27. Soit z une fonction composée ou complexe, dépendant à la

[1] Si l'on veut abréger et s'en tenir exclusivement aux ressources offertes

fois de deux variables x, y, et représentée par

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad z = f(x, y).$$

On demande de déterminer la différentielle $\dot{z}$ pour le cas général où les deux grandeurs x, y varient simultanément.

Désignons par A la surface que l'équation (1) détermine par rapport à trois axes coordonnés OX, OY, OZ.

Soit,

C une ligne tracée sur la surface A et prise pour génératrice de cette surface;

m un point mobile assujetti à glisser sur la ligne C pendant la génération de la surface A;

u la vitesse attribuée au point m sur la ligne C.

Dans le déplacement continu de la ligne C, deux cas sont possibles, selon que cette ligne change de position sans changer de forme, ou qu'elle change en même temps de forme et de position.

Supposons d'abord la ligne C de forme invariable.

En ce cas, on peut toujours et, à chaque instant, considérer le mouvement de la ligne C comme se composant de deux mouvements simultanés et distincts, l'un de rotation autour du point m, l'autre de translation [1]. Soit v la vitesse *actuelle* du point m sur

par la géométrie plane, on peut, avec avantage, remplacer le n° 27 par le n° 38.

[1] Soit μ le point de la ligne C qui coïncide avec le point *m à l'instant que l'on considère*, et D_1 la touchante en ce point. Représentons-nous les rayons vecteurs allant du point μ aux autres points de la ligne C. Lorsque la ligne C change de position sans changer de forme, ces rayons forment, avec la ligne C et la droite D_1, un système invariable. Lorsque la ligne C change de forme en même temps que de position, on peut dire de la droite D ce que nous avons dit plus haut de la ligne C, à savoir, que la droite D_1 est animée de deux mouvements simultanés, l'un de rotation autour du point μ, l'autre de translation. S'agit-il ensuite de la ligne C? Pour tenir compte à la fois des deux changements qu'elle subit *à partir de l'instant considéré*, il suffit d'attribuer à chacun des rayons vecteurs allant du point μ aux autres points de la ligne C,

la surface A. Cette vitesse ne peut évidemment dépendre en aucune façon de la rotation de la ligne C autour du point m. Il s'ensuit donc qu'elle résulte exclusivement de la translation mentionnée ci-dessus et du glissement du point m sur la ligne C.

Supposons, en second lieu, que la ligne C change de forme en même temps qu'elle change de position.

D étant la directrice du point m sur la ligne C, il suffit de substituer à la ligne C la droite D pour que les mêmes déductions soient *littéralement* applicables et subsistent ainsi généralement.

Désignons par μ le point de la ligne C qui coïncide avec le point m à l'instant que l'on considère. Les composantes de la vitesse v sont dirigées respectivement, l'une suivant la tangente à la trajectoire du point μ, l'autre suivant la tangente à la ligne C. Soit P le plan déterminé par ces deux tangentes, et T la droite suivant laquelle est dirigée la vitesse v. Il est visible que la droite T est nécessairement située dans le plan P. On voit d'ailleurs que, suivant la valeur attribuée à la vitesse u du point m sur la ligne C, la droite T peut prendre dans le plan P toutes les directions imaginables. De là résulte évidemment la conclusion suivante :

Les tangentes à toutes les lignes tracées sur la surface A *et pas-*

1° l'état de mouvement de la droite D_1; 2° un certain glissement sur lui-même *; 3° une rotation particulière autour du point μ.

Cela posé, il est visible que la vitesse du point m, *au sortir du lieu* μ, n'est modifiée ni en grandeur ni en direction par le changement de forme de la ligne C. Cette vitesse est la même que si, *à partir de l'instant considéré*, la ligne C persistait dans la forme qu'elle affecte *à ce même instant*. Elle est la même que si le point m sortait du lieu μ en glissant sur la droite D_1 avec le degré de rapidité qu'on lui attribue sur la ligne C. Ces simples remarques permettent de considérer le cas où la ligne C change en même temps de forme et de position, comme immédiatement réductible à celui où cette ligne change de position sans changer de forme.

* Ce glissement correspond, pour chaque rayon vecteur, au changement de grandeur qu'il peut avoir à subir, comme conséquence du changement de forme de la ligne C. On ne perdra pas de vue que l'état de mouvement de la droite D_1 se compose d'une rotation autour du point μ et d'une translation qui n'est autre que la vitesse *actuelle* de ce point *rendue commune* à tous les autres.

sant par le point m *sont situées, en général, dans un seul et même plan*[1].

Sans rien changer à ce qui précède, soient x, y, z les coordonnées du point m. Les composantes de la vitesse v parallèles aux axes OX, OY, OZ, sont respectivement $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Considérons les deux sections s, s' faites en m parallèlement aux plans des zx et des zy. D, D' étant les droites qui touchent en m les sections s, s', nous savons que le plan de ces droites contient la direction de la vitesse v, et qu'en conséquence, cette vitesse est décomposable en deux autres a, a' respectivement dirigées, l'une suivant la droite D, l'autre suivant la droite D'. Si nous désignons par $\dot{z}_x$ la valeur déduite de l'équation (1) en opérant sur z dans l'hypothèse $y =$ constante, il est visible que la vitesse a se décompose en deux autres, l'une $\dot{x}$, l'autre $\dot{z}_x$. Si nous désignons de même par $\dot{z}_y$ la valeur déduite de l'équation (1) en opérant sur z dans l'hypothèse $x =$ constante, il est visible que la vitesse a' se décompose en deux autres l'une $\dot{y}$, l'autre $\dot{z}_y$. Concluons que la composante de la vitesse v parallèle à oz peut être exprimée indifféremment soit par $\dot{z}$, soit par la somme algébrique des deux vitesses simultanées $\dot{z}_x$ et $\dot{z}_y$. De là résulte immédiatement

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y = \dot{x}\, f_x'(x, y) + \dot{y}\, f_y'(x, y)\,^{*}.$$

L'équation (1), impliquant comme conséquence l'équation (2), il en résulte, pour les fonctions composées ou complexes, une règle

[1] La démonstration suppose qu'il y a continuité autour du point μ. Elle suppose, en outre, que, dans la génération de la surface A par la ligne C, le point μ est animé d'une certaine vitesse, différente de zéro et non dirigée suivant la génératrice. On voit aisément que ces conditions subsistent en général, et qu'elles ne peuvent cesser d'être remplies qu'en certains points singuliers de la surface A.

* Dans les expressions de la forme

$$\dot{z}_x, \ f_x'(x, y), \quad \dot{z}_y, \ f_y'(x, y),$$

l'indice inférieur exprime celle des variables à laquelle l'opération effectuée se rapporte, les autres variables étant considérées comme constantes.

générale qui se combine avec les précédentes et comprend ainsi tous les cas possibles d'application. Cette règle peut s'énoncer comme il suit :

La différentielle d'une fonction composée ou complexe est la somme des différentielles qu'on obtient en distinguant dans la fonction ses éléments variables, et en opérant successivement pour chaque élément distinct, comme s'il était seul variable, tandis que tous les autres sont supposés constants [1].

[1] Le procédé fourni par la méthode des limites conduit directement et très-simplement à ce résultat.

Observons d'abord que la limite du produit de plusieurs facteurs est égale au produit des limites respectives de ces mêmes facteurs.

Cela posé, soit la relatiou générale

(1) . . . . $z = f(x,\ y).$

Par hypothèse les grandeurs x, y varient en même temps et avec continuité. De là résulte entre ces grandeurs une relation qui peut être déterminée ou arbitraire, mais qui, dans tous les cas, peut s'exprimer de la manière suivante :

(2) . . . . $y = \varphi(x).$

L'équatlon (1) devient, eu égard à l'équation (2),

(3) . . . . $z = f(x,\ \varphi(x) = \mathrm{F}(x),$

et l'on en déduit, conformément à la formule (2) du n° 8,

$$\frac{\dot z}{\dot x} = \lim \frac{\Delta \mathrm{F}(x)}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

De là résulte, en premier lieu,

$$\frac{\dot z}{\dot x} = \lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x.},$$

en second lieu,

$$\frac{\dot z}{\dot x} = \frac{\dot y}{\dot x} f_y'(x, y) + f_x'(x, y),$$

et, par suite,

(4) . . . . $\dot z = \dot y\, f_y'(x,y) + \dot x.\, f_x'(x, y).$

Veut-on déduire de l'équation (4) la propriété caractéristique du plan

Montrons par un exemple comment la règle qui vient d'être formulée se combine avec celle du nº 26, et ramène ainsi toutes les opérations du calcul différentiel à la différentiation des fonctions élémentaires.

Soit

$$y = x^x \sin lx,$$

l étant la caractéristique du système des logarithmes népériens.

Si nous posons

$$y = x^x \sin u,$$

tangent? Il suffit de se reporter à la surface représentée par l'équation (1) dans un système quelconque d'axes coordonnés, et de considérer, pour un même point quelconque m de cette surface, les trois tangentes situées respectivement, la première dans un plan parallèle aux zx, la deuxième dans un plan parallèle aux zy, la troisième dans un plan quelconque intermédiaire.

Transportons l'origine au point m et, sur la dernière des trois tangentes mentionnées tout à l'heure, prenons un point n, dont les coordonnées soient respectivement $z = \dot z$, $y = \dot y$, $x = \dot x$. A l'abscisse $\dot x$ correspond pour la première tangente une ordonnée $\dot z_x$ déterminée par la relation

$$\dot z_x = \dot x \, f'_x \,(x, y);$$

à l'abscisse $\dot y$ correspond de même pour la deuxième tangente une ordonnée $\dot z_y$ déterminée par la relation

$$\dot z_y = \dot y \, f'_y \,(x, y).$$

Cela posé, il est aisé de voir que la relation générale

$$\dot z = \dot z_x + \dot z_y$$

résultant de l'équation (4), implique comme conséquence immédiate la déduction suivante :

Les trois tangentes considérées sont dans un seul et même plan. On voit d'ailleurs qu'en disposant du rapport $\frac{\dot y}{\dot x}$, on peut changer comme on veut la position du plan intermédiaire dans lequel est située la troisième tangente. De là donc résulte aussi cet énoncé général :

Le plan tangent en un point d'une surface contient, en général, les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point.



nous en déduirons d'une manière générale

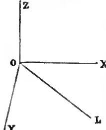
$$\dot{y} = \dot{x}zx^{z-1} \sin u + \dot{z}.x^{z}.lx. \sin u. + \dot{u}x^{z} \cos u.$$

De là résulte, en remplaçant z par x, et u par lx,

$$\dot{y} = \dot{x}\,(x^{x} \sin lx + x^{x}\, lx. \sin lx + x^{x-1} \cos lx).$$

28. Soit une surface A; O un point de cette surface; OX, OY, OZ, trois droites menées par le point O et non situées dans un même plan; OL une droite quelconque tracée par le point O dans le plan XOY.

Fig. 29.



Prenons les droites OX, OY, OZ pour axes coordonnés, et, considérant les sections faites dans la surface A par les plans ZOX, ZOY, ZOL, désignons-les respectivement la 1re par Z_x, la 2me par Z_y, la dernière par Z_l.

Soient m_x, m_y, m_l trois points qui partent en même temps du point O et qui décrivent simultanément, le 1er la section Z_x, le 2me la section Z_y, le 3me la section Z_l.

Le mouvement de ces trois points pouvant être quelconque, supposons-le réglé de manière que les points m_x, m_l, m_y aient toujours même projection, les deux premiers sur l'axe des x, les deux derniers sur l'axe des y.

Concevons trois droites mobiles T_x, T_y, T_l assujetties à rester parallèles au plan ZOX et à toucher la surface A, la droite T_x en m_x, la droite T_y en m_y, la droite T_l en m_l.

x, y étant les coordonnées du point m_l dans le plan XOY, et α l'angle que la droite T_l fait avec l'axe des x, on a généralement

(1). . . . . . . $\alpha = \varphi\,(x,\ y).$

De là résulte, conformément à l'équation (2) du numéro qui précède :

$$\alpha = \dot{\alpha}_x + \dot{\alpha}_y = \dot{x}\,\varphi'_x(x, y) + \dot{y}\,\varphi'_y(x, y)\ ^*.$$

Appliquée au point O, l'équation (2) exprime la propriété suivante :

A l'origine commune du déplacement simultané des trois points m_x, m_y, m_t, *la vitesse angulaire de la tangente* T_t *est la somme des vitesses angulaires des tangentes* T_x *et* T_y.

Résumé des résultats précédents.

29. Les notions qui précèdent suffisent pour que, dans le cas d'une fonction quelconque simple ou composée,

$$F(x, y, z, \ldots.) = V = o,$$

on puisse déterminer la relation correspondante.

$$\dot{x}V'_x + \dot{y}V'_y + \dot{z}V'_z + \text{etc.} = o.$$

Elles suffisent également pour que, étant donnée la relation

(1) . . . . $\dot{y} = \dot{x}\,\varphi(x)$,

on puisse en déduire la relation réciproque

(2) . . . . $\Delta y = \Delta f(x)$,

* Soit v la vitesse actuelle du point m_t sur sa trajectoire;

$\dot{x}$, $\dot{y}$, les composantes de la vitesse v dans le plan XOY;

μ le point de la surface A qui coïncide avec le point m_t, à l'instant que l'on considère;

S_x, S_y les sections que déterminent, dans la surface A, deux plans menés par le point μ, l'un parallèlement aux zx, l'autre parallèlement aux zy.

Cela posé, voici quelle est la signification précise et générale des symboles $\dot{\alpha}_x$, $\dot{\alpha}_y$.

$\dot{\alpha}_x$ est la valeur *affectée* par $\dot{\alpha}$ *dans l'hypothèse* où le point m_t sortirait du lieu μ suivant la section S_x, la vitesse $\dot{x}$ n'étant pas changée.

$\dot{\alpha}_y$ est la valeur *affectée* par $\dot{\alpha}$ *dans l'hypothèse* où le point m_t sortirait du lieu μ suivant la section S_y, la vitesse $\dot{y}$ n'étant pas changée.

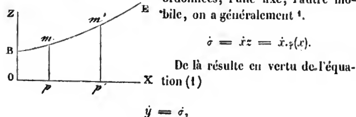
toutes les fois que l'inspection de la dérivée $\varphi(x)$ permet de reconnaître la fonction primitive correspondante $f(x)$.

Pour compléter cette dernière solution, nous allons montrer comment on peut, dans tous les cas, déduire de l'équation (1), sinon l'équation (2), du moins une représentation géométrique équivalente.

$\varphi(x)$ étant, par hypothèse, une fonction de la variable x entièrement connue, imaginons qu'elle représente l'ordonnée z d'une courbe rapportée à des axes coordonnés rectangulaires et ayant pour équation

$$z = \varphi(x).$$

Soit BE cette courbe; si l'on désigne par σ l'aire comprise entre la courbe BE, l'axe des x et deux ordonnées, l'une fixe, l'autre mobile, on a généralement [1].



$$\dot{\sigma} = \dot{x}z = \dot{x}.\varphi(x).$$

De là résulte en vertu de l'équation (1)

$$\dot{y} = \dot{\sigma},$$

[1] Soit *oam* un triangle limité par deux droites fixes *oa*, *am* et par une droite *om*, mobile autour du point *o*. (Voir la fig. 31, page suivante.)

U étant la surface du triangle *oam*, *h* la perpendiculaire abaissée du point *o* sur la base *am*, et *x* cette base, on a généralement.

$$U = \frac{hx}{2}.$$

De là résulte, conformément à la règle 3 du numéro 5,

$$\dot{U} = \frac{h\dot{x}}{2}.$$

Représentons par *mm'* la vitesse $\dot{x}$ du point *m* et achevons le triangle *mm'm''*, dont les côtés *mm''*, *m'm''* sont respectivement dirigés, l'un perpen-

et, conséquemment,

$$\Delta y = \Delta \sigma.$$

Mais d'un autre côté, si les valeurs extrêmes attribuées à la variable sont x, x' et qu'on prenne $op=x$, $op'=x'$, on a, en désignant par mp, mp' les ordonnées correspondantes,

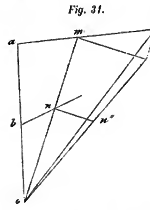
$$\Delta \sigma = pmm'p'.$$

Il vient donc aussi comme équivalent géométrique de l'équation (2)

$$\Delta y = \text{aire } (pmm'p').$$

diculairement, l'autre parallèlement à la droite *om*. Si nous tirons les droites *om'*, *om''*, il est visible que les triangles *omm'*, *omm''* sont équivalents, puisqu'ils ont même base *om*, et leurs sommets *m'*, *m''* situés sur une même droite parallèle à cette base. De là résulte en premier lieu la conséquence suivante :

Fig. 31.



La vitesse $\dot{U}$ *ayant pour expression numérique le produit* $\frac{hx}{2}$, *on peut la représenter indifféremment par l'aire de l'un ou l'autre des triangles* omm', omm''.

Prenons pour expression de la vitesse $\dot{U}$ l'aire du triangle *omm''* et observons que, dans ce triangle, la base *mm''* est la vitesse de circulation communiquée au point *m* par la rotation de la droite *om* autour du point *o*.

Soit *obn* un second triangle limité comme le premier, avec cette seule différence que la droite *am* est remplacée par la droite *bn* : *nn''* étant la vitesse de circulation communiquée au point *n* par la rotation de la droite *om* autour du point *o*, il est clair que la vitesse d'accroissement de l'aire *obn* est représentée par le triangle *onn''*, en même temps et de la même manière que la vitesse $\dot{U}$ est représentée par l'aire *omm''*.

Concluons qu'en désignant par σ l'aire du quadrilatère *amnb*, on a, pour expression de la vitesse $\dot{\sigma}$, l'aire du trapèze *mm''n''n*.

Ce résultat est indépendant des directions suivies par les points *m* et *n* à l'origine de leur déplacement simultané. Il s'étend de lui-même au cas où les droites *am*, *bn* seraient remplacées par des courbes quelconques situées

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

30. Soit

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f(x),$$

une fonction quelconque de la variable x. Nous savons qu'en dé-

dans un même plan et passant, l'une par le point m, l'autre par le point n. Il est donc tout à fait général, et l'on peut, en conséquence, le formuler comme il suit :

La différentielle de l'aire engendrée par un segment de droite mobile dans un plan est égale au produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu.

Cet énoncé général comprend le cas particulier où la droite mobile se meut par translation. On peut d'ailleurs prendre ce cas à part et le traiter directement.

Soit z une ordonnée mobile dans un plan et limitée par deux droites fixes ab, cd. L'ordonnée z, représentée par mp, se meut en restant perpendiculaire à la droite cd. Elle engendre ainsi l'aire trapézoïdale $ampc$. Soit σ cette aire et li une droite menée par le point m parallèlement à cd.

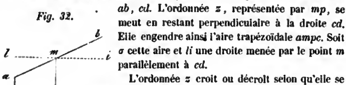


Fig. 32.

L'ordonnée z croît ou décroît selon qu'elle se meut de gauche à droite, ou de droite à gauche au sortir du lieu quelconque mp. Dans le premier cas, la vitesse $\dot{\sigma}$ ne peut être inférieure à $\dot{x}.z$: elle est donc égale ou supérieure à ce produit. *Supposons* la représentée par $(z + \eta)\,\dot{x}$: il en résulte évidemment que, dans le second cas, elle est exprimée en grandeur par $(z - \eta)\,\dot{x}$. Cela posé, imaginons qu'après avoir fait croître l'aire σ d'une quantité quelconque $\Delta\sigma$, on la fasse décroître de cette même quantité, l'ordonnée z et la vitesse $\dot{x}$ repassant en sens inverse par les mêmes valeurs. *L'hypothèse admise* implique cette conséquence absurde que les longueurs engendrées simultanément par deux points, respectivement animés, l'un d'une vitesse plus grande $(z + \eta)\,\dot{x}$, l'autre d'une vitesse moins grande $(z - \eta)\,\dot{x}$, sont égales entre elles. Concluons qu'on a nécessairement $\eta = o$, et par suite,

$$\dot{\sigma} = z\dot{x}.$$

L'extension que cette formule comporte est d'ailleurs évidente.

signant par $\dot{y}$, $\dot{x}$ les différentielles correspondantes, on a généralement

(2) . . . . $\dot{y} = \dot{x}.\, f'x.$

Considérées en elles-mêmes, les grandeurs $\dot{y}$, $\dot{x}$ ne diffèrent en rien des grandeurs ordinaires susceptibles d'être soumises au calcul. On peut donc leur appliquer toutes les déductions qui précèdent et opérer sur elles, par voie de différentiation, comme on l'a fait d'abord sur les grandeurs données y et x.

Les différentielles des grandeurs $\dot{y}$, $\dot{x}$, sont dites *différentielles du second ordre*, par rapport aux grandeurs primitives y, x; on les distingue par un redoublement du point mis en surcharge ou de la lettre d. Il vient ainsi

$$d\dot{y} = \ddot{y} = d.dy, \quad d\dot{x} = \ddot{x} = d.dx,$$

et plus simplement

$$d\dot{y} = \ddot{y} = d^2y, \quad d\dot{x} = \ddot{x} = d^2x.$$

On déduit d'ailleurs de l'équation (2)

(3). . . . . . $\ddot{y} = \ddot{x}\, f'(x) + \dot{x}^2 .\, f''(x).$

$f''(x)$ étant la dérivée de $f'(x)$ ou, ce qui revient au même, la *dérivée seconde* de $f(x)$.

Le même ordre d'idées, constamment poursuivi, conduit des différentielles du second ordre à celles du troisième, de celles-ci aux différentielles du quatrième ordre, et ainsi de suite indéfiniment. Les signes adoptés pour représenter ces différentielles successives résultent d'ailleurs de l'application toujours répétée des conventions premières. Il vient ainsi

$$d\ddot{y} = \dddot{y} = d.d^2y = d^3y, \quad d\ddot{x} = \dddot{x} = d.d^2x = d^3x,$$

et généralement,

$$d^ny = d\, d^{n-1}y, \quad d^nx = d.d^{n-1}x.$$



On a en même temps, comme conséquence de l'équation (3),

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \dddot{y} = \dddot{x} f'(x) + 3\ddot{x}\dot{x} f''(x) + \dot{x}^3 f'''(x),$$

et ainsi de suite indéfiniment.

31. Lorsque la variable x est indépendante et qu'on en dispose en la faisant croître ou décroître d'une manière uniforme, on a

$$\dot{x} = \text{cons}^{\text{te}},$$

et par suite

$$\ddot{x} = o.$$

Il vient alors très-simplement

$$\ddot{y} = \dot{x}^2 f''(x),$$
$$\dddot{y} = \dot{x}^3 f'''(x),$$

et en général

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d^n y = \dot{x}^n . f^n(x) = dx^n . f^n(x).$$

De là résulte

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

le rapport des deux grandeurs $d^n y$ et dx^n étant précisément égal à la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$.

Lorsque la variable x n'est pas uniformément croissante ou décroissante, l'équation (6) cesse d'être vraie pour toute valeur de n supérieure au nombre 1. Néanmoins on est convenu de considérer comme équivalentes les deux expressions $f^n(x)$ et $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)$. En ce cas, il ne faut plus voir dans la dernière de ces expressions le quotient des deux grandeurs $d^n y$ et dx^n, mais seulement un symbole où ces deux grandeurs figurent à la fois, sans pouvoir se séparer l'une de l'autre, et qui, par suite de la convention adoptée, ne représente pas autre chose que la dérivée $f^n(x)$.

Du changement de la variable indépendante.

32. On suppose une formule établie dans l'hypothèse où la variable x, considérée comme indépendante, a été assujettie à croître ou à décroître uniformément. Les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc., entrant comme parties constituantes de la formule dont il s'agit, le problème à résoudre consiste à déterminer les expressions qu'il faut mettre à la place de ces dérivées pour transformer cette même formule et la rendre applicable au cas général où la variable x croît ou décroît d'une manière quelconque.

Partons de l'équation

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

qui subsiste dans tous les cas. On en déduit par la différentiation

$$df'(x) = \dot{x}f''(x) = d.\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2},$$

et de là résulte immédiatement

$$(2). \quad . \quad . \quad f''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}.$$

On a de même

$$(3) \quad . \quad f'''x = \frac{1}{\dot{x}}\, d\ \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{dx}.\ \ d.\ \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

CHAPITRE V.

EXTENSION DES RÈGLES PRÉCÉDENTES AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

NB. — Au lieu de procéder comme il suit, il est beaucoup plus simple de passer les nos 33, 34, 35 et d'intercaler à leur place le no 39.

1° *Théorème des tangentes réciproques*[1].

33. Soit une surface A, O un point de cette surface, P le plan tangent en ce point, OZ la normale, OX, OY, OL trois droites menées par le point O et situées dans le plan P. (Voir fig. 29, no 28, page 129.)

Prenons les droites OX, OY, OZ pour axes coordonnés, et considérant les sections faites dans la surface A par les plans ZOX, ZOY, ZOL, désignons-les respectivement la 1re par N_x, la 2me par N_y, la 3me par N_l.

Soient m_x, m_y, m_l trois points qui partent en même temps du point O et qui décrivent simultanément, le 1er la section N_x, le 2me la section N_y, le 3me la section N_l.

Le mouvement de ces trois points pouvant être quelconque, supposons-le réglé d'après les conditions suivantes :

1° Les vitesses des points m_x, m_l ont même composante $\dot{x}$ suivant l'axe des x.

2° Les vitesses des points m_y, m_l ont même composante $\dot{y}$ suivant l'axe des y.

Concevons trois droites mobiles T_x, T_y, T_l assujetties à rester

[1] On peut supprimer les numéros 33, 34 et 35, en les remplaçant tous trois par le no 39. La marche devient ainsi plus rapide et plus simple. Elle offre, en outre, l'avantage de ne point exiger d'autres ressources que celles qui s'empruntent à la géométrie plane.

parallèles au plan ZOX, et à toucher la surface A, la droite T_x en m_x, la droite T_y en m_y, la droite T_t en m_t.

α étant l'angle qu'une droite quelconque T, tangente à la surface A et parallèle au plan ZOX, fait avec l'axe des x, on a généralement

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \alpha = \varphi(x,\, y).$$

De là résulte, conformément aux déductions des n°s 27 et 28,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_x + \dot{\alpha}_y \; *.$$

Appliquée au point O, l'équation (2) exprime qu'à l'origine commune du déplacement simultané des trois points m_x, m_y, m_t, la vitesse angulaire de la tangente T_t est égale à la somme des vitesses angulaires des tangentes T_x et T_y. Il s'ensuit que la séparation des points m_x, m_t s'effectue, au sortir du lieu O, comme s'ils se mouvaient simultanément avec la vitesse commune $\dot{x}$ sur deux droites distinctes, et qu'en même temps ces deux droites, d'abord confondues en OX, s'écartassent l'une de l'autre avec la vitesse $\dot{y}$ et tournassent parallèlement au plan ZOX, l'une autour du point m_x avec la vitesse $\dot{\alpha}_x$, l'autre autour du point m_t avec la vitesse $\dot{\alpha}_x + \dot{\alpha}_y$.

Désignons par U une droite assujettie à toucher en m_x la surface A et à rester parallèle au plan ZOY.

De même qu'en se séparant du point O le point m_y détermine la direction première de la tangente U, de même en s'écartant l'un de l'autre au sortir du lieu O, les points m_x, m_t déterminent la vitesse angulaire de cette même tangente, à l'origine de son déplacement. Il est évident que cette vitesse angulaire ne peut dépendre en aucune façon de la rotation $\dot{\alpha}_x$ commune aux deux droites T_x et T_t. Concluons qu'elle résulte exclusivement du mou-

* Cette équation peut s'établir directement *à priori* par un procédé analogue à celui dont nous avons fait usage pour démontrer la propriété fondamentale du plan tangent. Il est plus simple de la déduire, comme on l'a fait au n° 28, du théorème général fondé sur cette même propriété.

vement relatif de ces deux droites, c'est-à-dire de la translation $\dot{y}$ de la droite T_i et de la rotation $\dot{\alpha}_y$ avec laquelle la droite T_i s'écarte angulairement de la droite T_x.

Cela posé, considérons une droite dirigée d'abord suivant OX, et sortant de cette position par un double mouvement de translation et de rotation, la translation s'effectuant suivant l'axe des y avec la vitesse $\dot{y}$ et la rotation autour du point m_y avec la vitesse $\dot{\alpha}_y$.

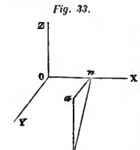


Fig. 33.

Soit n un point de cette droite pris à la distance x du point O et ζ l'angle anp que fait avec l'axe des y la direction suivie par le point n à l'origine du déplacement de la droite mobile. Les composantes de la vitesse du point n étant rectangulaires et représentées respectivement l'une par $an = \dot{y}$, l'autre par $ap = x\,\dot{\alpha}_y$, on a évidemment

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \operatorname{tang} \zeta = x . \frac{\dot{\alpha}_y}{\dot{y}} .$$

Soit D la droite déterminée par cette direction. Lorsque le point n est considéré comme se déplaçant sur la droite OX par rapport au point O, ou, ce qui revient au même, lorsque le point O est considéré comme se déplaçant sur la droite OX par rapport au point n, la droite D tourne avec une vitesse angulaire $\dot{\zeta}_x$ qu'il est facile de déterminer au moyen de l'équation (3). Il suffit pour cela d'opérer sur cette équation en y considérant les deux vitesses $\dot{y}$ et $\dot{\alpha}_y$ comme constantes et les grandeurs x et ζ comme variables. De là résulte, conformément à la règle (2) du n° 21,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \dot{\zeta}_x = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\ \dot{\alpha}_y \cos^2 \zeta \, ^{*} .$$

* On peut parvenir à cette équation, soit comme nous l'indiquons ici, soit directement et par voie purement géométrique.

Supposons que le point n coïncide avec le point O et qu'il sorte de cette position en glissant suivant OX avec la vitesse $\dot{x}$: l'angle β étant nul, l'équation (4) devient

$$(5). \quad \dot{y}\,\dot{\beta}_x = \dot{x}\,\dot{\alpha}_y.$$

Mais alors, de même que le point n se confond avec le point m_x et la droite D avec la tangente U, de même aussi la vitesse angulaire $\dot{\beta}_x$ est celle de cette même tangente à l'origine de son déplacement.

Prenons la droite OL (*fig.* 29) de manière qu'elle divise en deux parties égales l'angle XOY. Il vient en ce cas $\dot{x} = \dot{y}$, et l'équation (5) donne en conséquence

$$(6) \quad \dot{\beta}_x = \dot{\alpha}_y.$$

Traduite en langage ordinaire, l'équation (6) exprime une propriété curieuse qui comporte de nombreuses applications et qu'on peut énoncer comme il suit :

Soit P un plan tangent en O à une surface A; OX, OY les traces sur le plan P de deux sections normales N_x, N_y. Nous désignons sous le nom de *tangentes réciproques* deux tangentes conjuguées entre elles et respectivement assujetties, l'une à rester parallèle au plan de la section N_x tandis que son point de contact glisse sur la section N_y, l'autre à rester parallèle au plan de la section N_y tandis que son point de contact glisse sur la section N_x.

Cela posé, voici l'énoncé dont il s'agit :

Lorsque deux tangentes réciproques sortent en même temps et avec une égale vitesse des sections normales qui les déterminent, leurs rotations autour des directions qu'elles suivent respectivement sont égales et de signe contraire [1].

[1] Lorsqu'un solide tourne autour d'un axe, on représente sa vitesse de rotation par une portion de l'axe égale en longueur à la grandeur de cette même vitesse. On tient compte du *sens* en fixant sur un point quelconque de l'axe l'origine de la longueur prise pour mesure de la vitesse et portant cette longueur du côté où la rotation s'effectue de *gauche à droite* pour un observateur placé le long de l'axe, *les pieds à l'origine*.

On observera que l'égalité des vitesses angulaires $\dot{\alpha}_x$, $\dot{\beta}_y$ implique celle des

34. Le théorème que nous venons d'énoncer peut s'établir *à priori* de plusieurs façons différentes. Bornons-nous à en donner ici une seconde démonstration *.

Sans rien changer à ce qui précède, supposons l'axe OX déterminé de manière à coïncider avec la *caractéristique* du plan P, cette caractéristique étant prise dans l'hypothèse où le plan P se déplace en touchant la surface A le long de la section N_y **. A l'origine de son déplacement, la tangente T_y est animée de deux mouvements simultanés, l'un de translation s'effectuant avec la vitesse $\dot{y}$, l'autre de rotation autour de la caractéristique OX. Ces deux mouvements n'altérant en rien la direction de la tangente T_y, il s'ensuit que l'on a nécessairement

$$(1) \quad \dot{\alpha}_y = 0.$$

De là résulte la conséquence suivante :

La séparation des points m_y, m_t s'effectue, au sortir du lieu O, comme s'ils se mouvaient simultanément, avec la vitesse commune $\dot{x}$ sur deux droites distinctes, et qu'en même temps ces deux droites, d'abord confondues en OX, s'écartassent l'une de l'autre avec la vitesse $\dot{y}$ et tournassent parallèlement au plan ZOX, l'une autour du point m_x, l'autre autour du point m_t, toutes deux d'ailleurs avec une seule et même vitesse $\dot{\alpha}_x$.

rotations introduites au lieu de ces vitesses dans l'énoncé donné comme traduction de l'équation (6). Pour le voir, il suffit de faire les remarques suivantes :

1° La vitesse $\dot{\alpha}_y$ résulte d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan ZOX. Elle équivaut, *en ce qui concerne la tangente* T_y, à la rotation $\dot{\alpha}_y$: sin XOY autour de l'axe OY;

2° La vitesse $\dot{\varepsilon}_x$ résulte d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan ZOY. Elle équivaut, *en ce qui concerne la tangente* U, à la rotation $\dot{\varepsilon}_x$: sin XOY autour de l'axe OX.

Il est clair, en effet, que l'égalité des vitesses angulaires $\dot{\alpha}_y$ et $\dot{\varepsilon}_x$ implique celle des rotations équivalentes $\dot{\alpha}_y$: sin XOY, $\dot{\varepsilon}_x$: sin XOY.

* Nous renvoyons aux applications géométriques pour d'autres démonstrations, moins directes peut-être, mais plus rapides et plus simples.

** On sait que ce déplacement commence par rotation autour d'une droite passant par le point O et située dans le plan P. C'est cette droite qu'on désigne sous le nom de *caractéristique*.

L'identité, qui s'établit ainsi de part et d'autre, montre évidemment qu'à l'origine du déplacement de la tangente U, la vitesse angulaire de cette tangente est égale à zéro. On a donc, comme conséquence de l'équation (1):

(2) . . . . $\dot{\mathcal{C}}_x = o.$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où le plan P se déplace en touchant la surface A le long de la section N_x, et cherchons ce que devient alors sa caractéristique. Pour reconnaître qu'elle coïncide avec l'axe OY, il suffit d'observer qu'en ce cas l'équation (2) subsiste nécessairement, tandis que pour toute autre position cette même équation deviendrait impossible [1]. Concluons que l'équation (2) subsistant comme conséquence de l'équation (1), il y a de part et d'autre réciprocité complète, c'est-à-dire que si, d'une part, l'axe OX est la caractéristique du plan P pour un déplacement du point de contact dirigé suivant l'axe OY, réciproquement l'axe OY est la caractéristique du plan P pour un déplacement du point de contact dirigé suivant l'axe OX. Liées entre elles d'après ces conditions les deux caractéristiques OX, OY prennent le nom de *caractéristiques conjuguées.*

Cela posé, considérons les tangentes réciproques déterminées par les sections normales N_x, N_t fig. 54. L'une est parallèle au plan N_t et son point de contact glisse suivant N_x. L'autre est parallèle au plan N_x et son point de contact glisse suivant N_t.

S'agit-il d'abord de la première? à l'origine de son déplacement, elle a même mouvement angulaire que l'intersection du plan N_t avec le plan P supposé mobile le long de la section N_x et tournant, en conséquence, autour de la caractéristique oY.

Soit m_x le point de contact supposé mobile suivant la section N_x et v la vitesse de ce point au sortir du lieu o. Si nous représentons par w la rotation de la directrice du point m_x pour une

[1] Si la caractéristique du plan P n'était point dirigée suivant l'axe OY, la rotation qui commence autour de cette caractéristique équivaudrait à deux rotations simultanées, l'une autour de l'axe OY, l'autre autour d'une perpendiculaire à cet axe. La conséquence évidente est que l'équation (2) ne subsisterait pas.

vitesse de ce point égale à l'unité, il s'ensuit que la rotation correspondante à la vitesse v a pour expression le produit $v.w$.

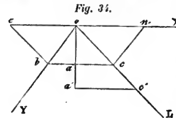


Fig. 34.

Élevons en o une perpendiculaire à la droite oX, et sur cette perpendiculaire, située dans le plan P, prenons la longueur oa égale au produit $v.w$.

Si par le point a nous menons une parallèle à oX, il est visible que la longueur ob, interceptée sur oY par cette parallèle, représente la rotation du plan P autour de la caractéristique oY.

Par le point b menons une parallèle à oL et désignons par e le point où cette parallèle vient couper l'axe oX. Le segment oe représente la rotation de la première tangente réciproque autour de la direction suivie par son point de contact.

S'agit-il, en second lieu, de la tangente réciproque qui reste parallèle au plan N_x et dont le point de contact glisse suivant N_i? En désignant par $\dot{\alpha}$ la vitesse angulaire qui anime cette droite à l'origine de son déplacement, on a, conformément aux déductions des numéros 27 et 28,

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_x + \dot{\alpha}_y.$$

D'un autre coté, nous venons de voir que la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_y$ se réduit ici à zéro. On a donc simplement

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_x.$$

Par le point c, où le prolongement de la droite ba vient couper la droite oL, menons la droite cn parallèle à l'axe oY, et désignons par n le point d'intersection de cette parallèle avec l'axe oX.

Si le point de contact supposé mobile sur N_i sortait du lieu o avec la vitesse oc, la rotation $\dot{\alpha}_x$ autour de l'axe oa serait représentée par le produit $on.w$. Il s'ensuit que, pour une vitesse de

ce point prise égale à v, comme dans le premier cas, il vient immédiatement

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_x = on.\, w\, \frac{v}{oc} = \frac{on}{oc} \cdot oa.$$

Prenons sur oa la longueur oa', égale à $\frac{on}{oc} \cdot oa$, et achevons le triangle $oa'c'$, semblable au triangle oac.

La rotation oa' se décompose en deux autres, l'une oc' ayant pour axe la direction suivie, l'autre représentée par $c'a'$, et ayant pour axe la droite oX. Celle-ci n'influe en rien sur la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_x$: on peut donc en faire abstraction et considérer exclusivement la rotation composante oc'. On a d'ailleurs

$$oc' = oa' \cdot \frac{oc}{oa} = oa \cdot \frac{on}{oc} \cdot \frac{oc}{oa} = on = bc = oc.$$

On voit ainsi que les deux rotations considérées sont égales et de sens contraire, conformément à l'énoncé du numéro précédent [1].

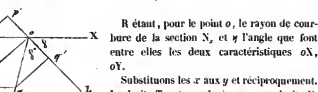
[1] Montrons, par anticipation, un exemple des ressources qu'offre notre méthode pour résoudre les questions de géométrie transcendante.

Reprenons les données du n° 33, en supposant, comme au n° 34, que les droites oX, oY soient deux caractéristiques conjuguées.

La droite T_l, entraînée par le point m_l, tourne autour de l'axe oY avec une vitesse facile à déterminer, en se reportant aux déductions du n° 34, et représentée comme il suit

$$\frac{\dot{\alpha}}{R \sin \eta}.$$

Fig. 35.



R étant, pour le point o, le rayon de courbure de la section N_x et η l'angle que font entre elles les deux caractéristiques oX, oY.

Substituons les x aux y et réciproquement. La droite T_l est remplacée par une droite U_l tangente en m_l à la surface A et parallèle au plan N_y. Il s'ensuit d'ailleurs que la droite U_l

2° *Des dérivées successives d'une fonction de plusieurs variables.*

35. Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables; x_1, y_1 deux valeurs quelconques déterminées de ces variables; a, b les valeurs

tourne autour de l'axe oX avec une vitesse représentée par

$$\frac{\dot{y}}{R' \sin \eta}.$$

R' étant, pour le point o, le rayon de courbure de la section N_y.

Prenons, à partir du point o sur les droites oX, oY, deux longueurs op, oq l'une op égale au quotient $\frac{\dot{y}}{R' \sin \eta}$, l'autre oq égale au quotient $\frac{\dot{x}}{R \sin \eta}$.

Si nous achevons le parallélogramme $optq$, la diagonale ot représente en direction, sens et grandeur la rotation du plan P supposé mobile avec le point m_t et tangent en ce point à la surface A.

Désignons par γ, γ' les angles que la direction oL fait avec les axes oX, oY. Les perpendiculaires abaissées sur oL des points p et q sont représentées respectivement, la première par

$$pp' = op \sin \gamma = \frac{\dot{y} \sin \gamma}{R' \sin \eta},$$

la deuxième par

$$qq' = oq \sin \gamma' = \frac{\dot{x} \sin \gamma'}{R \sin \eta}.$$

On voit d'ailleurs aisément que la vitesse angulaire de la directrice du point m_t sur la ligne N_t est représentée par la somme de ces deux perpendiculaires.

Soit ρ (pour le point o) le rayon de courbure de la section N_t; $v = oc$ la vitesse du point m_t, au sortir du lieu o (fig. 34); w la vitesse angulaire de la directrice du point m_t. On a d'abord

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho} = \frac{w}{v} = \frac{1}{oc}\left(\frac{\dot{y} \sin \gamma}{R' \sin \eta} + \frac{\dot{x} \sin \gamma'}{R \sin \eta}\right),$$

et, en même temps (voir fig. 34, page 143)

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad oc = \frac{\dot{x} \sin \eta}{\sin \gamma'} = \frac{\dot{y} \sin \eta}{\sin \gamma}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin^2 \eta}{\rho} = \frac{\sin^2 \gamma'}{R} + \frac{\sin^2 \gamma}{R'}.$$

L'équation (3) est l'équation polaire d'une ellipse ayant son centre en o et

correspondantes des dérivées partielles $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$. Nous avons, par hypothèse,

$$a = f'_x(x_1, y_1), \quad b = f'_y(x_1, y_1).$$

Posons

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad z = f(x, y) - ax - by,$$

et considérons la surface A, représentée par l'équation (1), dans un système quelconque où l'axe des z soit perpendiculaire à ceux des x et des y.

m étant un point pris, comme on veut, sur la surface A, soient P et Q les deux sections planes qui se coupent en m et qui sont respectivement parallèles, l'une P au plan des zx, l'autre Q au plan des zy. Si l'on désigne par α l'angle qu'une tangente à une section quelconque parallèle au plan des zx fait avec l'axe des x, on a généralement

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad \text{tg.}\ \alpha = f'_x(x, y) - a.$$

De là résulte pour la vitesse angulaire $\dot\alpha_y$ avec laquelle cette tangente tourne, lorsque son point de contact est en m sur la section P et qu'il se déplace suivant la section Q,

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \dot\alpha_y = \dot y\, f''_{x,y}(x, y).\cos.^2 \alpha \ *.$$

Soit β l'angle qu'une tangente à une section plane parallèle au plan des zy fait avec l'axe des y, on a, de même,

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \text{tg.}\ \beta = f'_y(x, y) - b,$$

pour rayon vecteur $v = \sqrt{\rho}$. La considération de cette ellipse, connue sous le nom d'*indicatrice*, et dont les droites oX, oY sont des diamètres conjugués, montre qu'en général, les caractéristiques conjuguées se confondent avec ces diamètres, et que les rayons de courbure des sections normales sont représentés par les carrés des rayons vecteurs correspondants. Nous reviendrons plus loin sur ces détails qu'il suffit ici d'indiquer.

* On voit aisément comment les équations (2), (3), (4), (5) se déduisent de ce qui précède et, aussi, comment on peut les établir directement par voie géométrique.



et, désignant par $\dot{\zeta}_x$ la vitesse angulaire avec laquelle tourne cette tangente lorsque son point de contact est en m sur la section Q et qu'il se déplace suivant la section P :

(5). . . . . $\dot{\zeta}_x = \dot{x}.\, f''_{y,x}(x, y).\cos^2 \zeta.$

Supposons le point m déterminé par les valeurs

$$x = x_1,\quad y = y_1$$

les équations (2) et (4) donnent

$$\text{tg. } \alpha = o,\quad \text{tg. } \zeta = o.$$

Il en résulte que le plan, mené par le point m parallèlement au plan des xy, touche en ce point la surface A, et, par suite, que l'équation (5) du n° 33 devenant applicable, on a nécessairement

$$\dot{y}.\dot{\zeta}_x = = \dot{x}.\dot{\alpha}_y.$$

Mais, d'un autre côté, les équations (3) et (5) donnent en même temps

$$\dot{\alpha}_y = \dot{y} f''_{x,y}(x_1, y_1),\quad \dot{\zeta}_x = x.f''_{y,x}(\dot{x}_1, y_1).$$

Il vient donc en substituant, supprimant le facteur commun $\dot{x}.\dot{y}$ et remplaçant par x, y les valeurs quelconques déterminées x_1, y_1,

$$f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y)\ ^{*}.$$

* L'équation fondamentale

$$f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y),$$

peut s'établir *à priori* de la manière suivante :

On a, conformément à la règle du n° 8,

(1) . . . . . $\lim \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$

et remplaçant y par $y + \Delta y$.

(2) . . $\lim \dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = f'_x(x, y+\Delta y).$

On déduit de là, en soustrayant membre à membre l'équation (1) de l'é-

On voit ainsi que, dans le cas de deux dérivations faites successivement par rapport à deux variables, le résultat définitif est indépendant de l'ordre suivi dans ces dérivations. Cette conséquence s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de dérivations successives faites sur une même fonction de n variables. De là, le principe général énoncé comme il suit :

Quel que soit l'ordre dans lequel on effectue plusieurs dérivations successives, SI L'ORDRE SEUL CHANGE ET QUE TOUTES CHOSES SOIENT ÉGALES D'AILLEURS, *le résultat définitif reste toujours le même.*

quation (2) et divisant par Δy

$$(3) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\lim \frac{f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-f(x,\, y+\Delta y)-f(x+x\Delta,\, y)+f(x,\, y)}{\Delta x.\, \Delta y} \\ &\qquad = \frac{f_x'(x,\, y+\Delta y)-f_x'(x,\, y)}{\Delta y}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, puisque, par hypothèse, les quantités Δx et Δy convergent en même temps vers zéro, l'équation (3) devient

$$(4).\quad \lim \frac{f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-f(x,\, y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\, y)+f(x,\, y)}{\Delta x.\, \Delta y} = f''_{x,\,y}(x,y).$$

Le premier membre de l'équation (4) resterait évidemment le même, si l'on répétait les opérations précédentes en opérant sur y, comme on l'a fait sur x et réciproquement.

De là résulte immédiatement :

$$(5). \ldots\ldots \quad f''_{x,\,y}(x,\, y) = f''_{y,\,x}(x,y). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Partant de ce résultat et procédant directement sur la surface représentée par l'équation

$$z = f(x,\, y),$$

on a d'abord comme au n° 33,

$$\dot{\alpha}_y = \dot{y}\, f''_{x,\,y}(x,\, y).\, \cos^2\alpha, \quad \dot{\mathfrak{c}}_x = \dot{x}\, f''_{y,\,x}(x,\, y) \cos^2\mathfrak{c},$$

et ensuite, eu égard à l'équation (5), de la présente note

$$\frac{\dot{y}\, \dot{\mathfrak{c}}_x}{\cos^2\mathfrak{c}} = \frac{\dot{x}.\, \dot{\alpha}_y}{\cos^2\alpha}.$$

De là se déduit, comme conséquence immédiate, le *théorème des tangentes réciproques* établi ci-dessus n° 33.

Les conventions adoptées pour représenter les dérivées successives et partielles d'une fonction à plusieurs variables, sont les suivantes :

Soit

$$z = f(x, y, u.....)$$

une fonction des variables x, y, u, etc. On écrit

$$f'''_{x,y,u}(x, y, u....) = \left(\frac{d^3z}{dx\,dy\,du}\right),$$

et, généralement,

$$f^n_{x,y,u...}(x, y, u....) = \left(\frac{d^nz}{dx\,dy\,du....}\right),$$

le nombre des dérivations étant toujours marqué par l'indice supérieur, et leur ordre successif, ainsi que les variables auxquelles elles se rapportent, par les signes inférieurs.

3° *Des différentielles totales et partielles de tous les ordres.*

36. Soient n variables liées entre elles par p relations : la différence $n-p$ exprime le nombre des variables dont on peut disposer arbitrairement, soit en les faisant croître ou décroître avec uniformité, soit en établissant entre elles des relations quelconques exprimées ou sous-entendues. Les variables dont on dispose, et qu'on assujettit à croître ou décroître d'une manière uniforme, sont dites *indépendantes ;* leurs différentielles du premier ordre sont des constantes, et, par suite, leurs différentielles des ordres supérieurs sont toutes égales à zéro.

Dans tous les cas, lors même qu'il y aurait autant d'équations simultanées que de variables moins une, on peut toujours introduire par la pensée une nouvelle variable, *prise pour variable indépendante,* et, afin que toutes les autres en deviennent fonction, concevoir au besoin une ou plusieurs relations arbitraires, que l'on ne détermine point aussi longtemps qu'on le juge convenable, et dont pourtant il est toujours permis de disposer. Ce

simple artifice est souvent d'un grand secours, soit pour faciliter les déductions, soit pour les éclairer davantage.

En se reportant au n° 27, il est aisé de voir que la différentielle d'une fonction à plusieurs variables est la somme des différentielles que l'on obtient en opérant tour à tour sur chaque variable, comme si elle variait seule, tandis que toutes les autres sont supposées constantes. Chacune des différentielles que l'on obtient successivement est dite *différentielle partielle* : leur somme est *la différentielle totale* de la fonction considérée.

Cela posé, montrons, par un exemple, comment on procède en général.

Soit une fonction à deux variables,

$$z = f(x,\ y).$$

On a d'abord

$$(1) \quad . \quad . \quad \dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y = \dot{x} f_x'(x, y) + \dot{y} f_y'(x, y),$$

ou, ce qui revient au même, sous une autre forme,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Il vient, en second lieu,

$$(3) \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} \ddot{z} = \dot{x}^2 f_x''(x, y) + 2\dot{x}\dot{y} f_{x,y}''(x, y) + \dot{y}^2 f_y''(x, y) \\ \quad + \dot{x} f_x'(x, y) + \ddot{y} f_y'(x, y), \end{array} \right.$$

ou, ce qui revient au même, la forme seule étant changée,

$$(4) \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2 \\ \quad + \left(\frac{dz}{dx}\right) d^2x + \left(\frac{dz}{dy}\right) d^2y\ ^*, \end{array} \right.$$

* Il importe de ne point perdre de vue que les expressions fractionnaires

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right),\ \text{etc.},$$

sont de purs symboles et non pas des quotients.

Et ainsi de suite, indéfiniment, les résultats obtenus pouvant s'appliquer à tous les cas possibles.

S'agit-il d'une fonction implicite

$$f(x, y) = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Pour passer du cas général à celui dont il s'agit actuellement, il suffit de poser

$$z = \text{cons}^{\text{te}},$$

et, par suite, de réduire à zéro les différentielles successives dz, d^2z, d^3z, etc.

Considérons en particulier le cas où les variables x, y étant *indépendantes*, on les assujettit à croître ou à décroître uniformément. Il vient alors

(5) . . . $\dot{x} = dx = \text{cons}^{\text{te}}, \quad \dot{y} = dy = \text{cons}^{\text{te}},$

et, par conséquent, pour toute valeur de n supérieure à l'unité,

(6) . . . . . $d^n x = o, \quad d^n y = o.$

Les formules (1), (3), etc., deviennent, en conséquence,

(7). . . . . $\left\{\begin{array}{l} \dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y \\ \ddot{z} = \ddot{z}_x + 2\ddot{z}_{x,y} + \ddot{z}_y \text{ *} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$

Les formules équivalentes (2), (4), etc., deviennent en même

* Le symbole $\ddot{z}_{x,y}$ exprime le résultat de deux différentiations opérées successivement, la première en considérant y comme constant, la seconde en considérant comme constantes les deux quantités x et $\dot{x}$.

temps,

$$(8)\quad \begin{cases} dz = \left(\dfrac{dz}{dx}\right) dx + \left(\dfrac{dz}{dy}\right) dy \\ d^2z = \left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\dfrac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy + \left(\dfrac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2 \\ d^3z = \left(\dfrac{d^3z}{dx^3}\right) dx^3 + 3\left(\dfrac{d^3z}{dx^2dy}\right) dx^2dy + 3\left(\dfrac{d^3z}{dxdy^2}\right) dxdy^2 \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{d^3z}{dy^3}\right) dy^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On observera que l'hypothèse où nous venons de nous placer est restrictive. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'une surface ayant pour équation

$$z = f(x, y),$$

par cela seul qu'on suppose les deux vitesses $\dot{x}$ et $\dot{y}$ constantes, il en résulte que le rapport des accroissements simultanés Δx et Δy est lui-même constant, et, par suite, que la variable y devient une fonction linéaire de la variable x. La conséquence est que les valeurs, exprimées ci-dessus pour les différentielles des ordres supérieurs, s'appliquent exclusivement aux sections planes faites dans la surface parallèlement à l'axe des z.

Il est visible que les déductions précédentes s'étendent d'elles-mêmes à un nombre quelconque de variables liées entre elles par une ou plusieurs équations. Il s'ensuit qu'on peut dès à présent effectuer la différentiation d'une fonction quelconque, et c'est, dans la simple application des règles exposées ci-dessus que se résout tout entier le calcul différentiel proprement dit.

CHAPITRE VI.

RÉSUMÉ DES RÈGLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET SIMPLIFICATIONS.

—

37. Résumons les règles du calcul différentiel, et comme l'exposé de ces règles n'exige point tous les développements donnés précédemment, montrons les simplifications qu'il comporte.

Partant des principes établis nos 3, 4, 5 et 6, on peut démontrer immédiatement les propositions des nos 26, 27, 28, 33 et 35, résumées comme il suit :

1° *La différentielle d'une fonction de fonction s'obtient en prenant la dérivée de la fonction principale par rapport à la fonction secondaire considérée comme simple variable et en multipliant cette dérivée par la différentielle de la fonction secondaire.*

2° *La différentielle d'une fonction composée ou complexe est la somme des différentielles qu'on obtient en distinguant dans la fonction ses éléments variables, et en opérant tour à tour pour chaque élément distinct, comme s'il restait seul variable, tandis que tous les autres sont supposés constants.*

3° *Quel que soit l'ordre dans lequel on effectue plusieurs dérivations successives, si l'ordre seul change, et que toutes choses soient égales, d'ailleurs, le résultat définitif reste toujours le même.*

Cela fait, on est en mesure de résoudre, en général, toutes les questions relatives à la différentiation simple ou répétée d'une fonction quelconque à une ou plusieurs variables.

S'agit-il ensuite d'applications particulières? Pour les rendre aussi faciles que les opérations les plus simples de l'algèbre, une seule chose reste à déterminer : ce sont les différentielles qui correspondent à chacune des fonctions élémentaires.

On a vu comment la marche à suivre, pour la différentiation des fonctions élémentaires, peut être à la fois très-simple et très-rapide, sans cesser néanmoins d'être purement géométrique. La même observation s'applique, en général, à tous les théorèmes dont nous avons donné la démonstration et sur lesquels nous nous sommes appuyé pour établir les règles dont on a besoin. Parmi ces théorèmes, il en est deux moins simples que les autres : l'un a pour objet la différentiation des fonctions composées; l'autre est relatif à l'identité des résultats fournis par plusieurs dérivations successives dont l'ordre seul a été changé. Lorsqu'on veut, ainsi que nous l'avons fait, suivre ici la voie purement géométrique, il faut d'abord établir la propriété caractéristique du plan tangent à une surface et celle des tangentes réciproques : c'est ensuite, en se fondant sur ces propriétés que l'on en déduit les deux théorèmes rappelés ci-dessus. Il n'échappera point au lecteur que ces deux théorèmes peuvent, comme nous l'avons montré [1], se déduire en quelques lignes du procédé général fourni par la méthode des limites et exposé géométriquement dans le n° 8. Ici donc, s'il y a en apparence quelque complication, il suffit pour la faire disparaître, d'emprunter le secours de la méthode des limites. Dès lors tout devient extrêmement simple, et c'est, sans la moindre difficulté, que l'on parvient directement aux deux équations fondamentales

(1). . . . . . . $\dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y$

(2). . . . . . . $f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y)$.

Veut-on, d'ailleurs, établir, comme conséquence immédiate, la propriété caractéristique du plan tangent et celle des tangentes conjuguées? Il ne reste plus qu'à considérer la surface représentée par l'équation

(3). . . . . $z = f(x, y)$,

[1] Voir les notes des n°s 27 et 35.

et à donner, pour cette surface, l'interprétation géométrique des équations (1) et (2).

Nous avons déjà fait voir [1] comment l'équation (1) a pour traduction géométrique l'énoncé suivant :

Le plan tangent en un point d'une surface contient, en général, les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point.

Montrons ici comment l'équation (2) peut aussi se traduire géométriquement.

Soit A la surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Par hypothèse, la surface A est rapportée à trois axes choisis comme on veut, sous la condition que l'axe des z soit perpendiculaire à chacun des deux autres.

m étant un point quelconque de la surface A, soient s_x, s_y les deux sections faites en ce point, la première par un plan parallèle aux zx, la deuxième par un plan parallèle aux zy.

Désignons par α l'angle que fait, avec l'axe des x, la droite T_x assujettie à toucher en m la section s_x. On a généralement

(1). . . . . . $\operatorname{tg} \alpha = f'_x\,(x, y)$,

x, y étant les coordonnées du point m.

De là résulte, pour le cas où le point m sort du lieu qu'il occupe en glissant sur la section s_y [2],

(2). . . . . $\dot{\alpha} = \dot{y}\, f''_{x,y}(x, y).\cos^2 \alpha$,

et, dans cette formule, $\dot{\alpha}$ exprime la vitesse de rotation avec laquelle la tangente T_x s'écarte angulairement de sa direction primitive.

[1] Voir la note du n° 27.

[2] Lorsqu'on différentie dans cette hypothèse, on doit considérer la variable x comme constante.

Soit β l'angle que fait avec l'axe des y la droite U_y assujettie à toucher en m la section s_y. En désignant par $\dot{\beta}$ la vitesse de rotation avec laquelle la tangente U_y s'écarte angulairement de sa direction primitive, lorsque le point m sort du lieu qu'il occupe en glissant sur la section s_y, on a comme tout à l'heure

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \dot{\beta} = \dot{x} f''_{y,x}(x, y). \cos^2 \beta.$$

Supposons que le plan, qui touche en m la surface A, soit parallèle au plan des xy et que les vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ soient égales. Les angles α, β s'annulant tous les deux, les sections s_x, s_y deviennent des sections normales, et l'on voit aisément que l'égalité des dérivées secondes $f''_{x,y}(x, y)$, $f''_{y,x}(x, y)$ implique comme conséquence immédiate la relation très-simple

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta}.$$

Cela posé, si l'on désigne sous le nom de *tangentes réciproques* les tangentes T_x, U_y, qui se déterminent l'une par l'autre d'après les conditions mentionnées plus haut, on a l'énoncé suivant :

Lorsque deux tangentes réciproques sortent en même temps, et avec une égale vitesse, des sections normales qui les déterminent, leurs rotations autour des directions qu'elles suivent respectivement sont égales et de signe contraire [1].

38. Veut-on procéder plus simplement encore? Veut-on établir toutes les règles de la différentiation, sans recourir à la méthode des limites, et sans emprunter d'autre secours que celui de la géométrie plane? Voici comment la marche à suivre peut devenir en même temps la plus prompte et la plus facile.

Établissons d'abord la règle générale, qui comprend toutes les autres.

Soit z une fonction composée ou complexe, dépendant à la fois

[1] Voir au besoin la note du n° 33, pour les éclaircissements que cet énoncé succinct peut laisser à désirer.

de deux variables x, y et représentée par

(1). . . . . $z = f(x, y)$.

Il s'agit de déterminer la différentielle $\dot{z}$ pour le cas général où les deux grandeurs x, y varient simultanément, l'une avec la vitesse $\dot{x}$, l'autre avec la vitesse $\dot{y}$.

Désignons par $\dot{z}_x$ et par $f_x'(x, y)$ la différentielle et la dérivée qu'on obtient en opérant sur l'équation (1) dans l'hypothèse $y =$ constante. De là résulte

(2). . . . . $\dot{z}_x = \dot{x}\, f_x'(x, y)$.

On a de même, en désignant par $\dot{z}_y$ et par $f_y'(x, y)$ la différentielle et la dérivée prises dans l'hypothèse $x =$ constante,

(3). . . . . $\dot{z}_y = \dot{y}\, f_y'(x, y)$.

Soient OX, OZ deux axes coordonnés. L'équation (1) étant rapportée à ces axes, chaque valeur attribuée à y peut se combiner avec l'ensemble des valeurs admissibles pour x. En opérant ainsi, on obtient, pour chaque valeur de la variable y, une ligne s complétement définie de forme et de position.

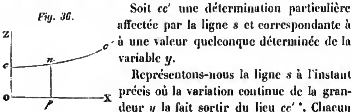


Fig. 36.

Soit cc' une détermination particulière affectée par la ligne s et correspondante à une valeur quelconque déterminée de la variable y.

Représentons-nous la ligne s à l'instant précis où la variation continue de la grandeur y la fait sortir du lieu cc' *. Chacun

* La démonstration développée dans le texte peut être remplacée par les considérations suivantes, très-directes et très-simples.

Soit une ligne s assujettie à rester dans un plan P et à s'y déplacer en changeant de forme.

m' étant un point *supposé fixe sur la ligne* s, désignons par D la tangente en ce point, et par n le lieu qu'il occupe dans le plan P, à l'instant que l'on considère. Le point m' sortant, par hypothèse, du lieu n, *on peut* choisir *arbi-*

des points de la ligne s peut être considéré comme sortant du lieu qu'il occupe sur cc' en glissant le long de l'ordonnée correspondante, et puisque, dans ce glissement, le point quelconque déterminé par l'abscisse x conserve cette même abscisse, il s'ensuit que la vitesse de ce point a pour expression générale

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \dot{z}_y = \dot{y}\, f_y'(x, y).$$

Cela posé, deux cas sont possibles, selon que la dérivée partielle

trairement * la direction suivant laquelle il est censé sortir de ce lieu, et déterminer, en conséquence, sa vitesse *actuelle*. Soit v' cette vitesse et ω' la vitesse angulaire *simultanée* avec laquelle la droite D tourne autour du point m'.

Il est visible, que, abstraction faite du changement de forme qu'elle subit, la ligne s peut être considérée comme participant tout entière au mouvement de la droite D, c'est-à-dire comme tournant autour du point m' avec la vitesse ω' et comme glissant dans le plan P avec la vitesse v' rendue commune à tous ses points. Cela posé, s'il y a changement de forme, il ne peut plus résulter que d'un déplacement subi par les différents points de la ligne s par rapport à la droite D, cette droite étant regardée comme fixe et la ligne s comme assujettie à lui rester tangente au point m'.

Soit m un point mobile assujetti à décrire la ligne s avec la vitesse v, et sortant ainsi du lieu n en même temps que le point m'. Désignons par u la vitesse totale qui anime le point m dans le plan P, au sortir du lieu n.

D'après ce qui précède, *il est évident que la vitesse* u *résulte des deux composantes* v, v', *de la même manière que si la ligne* s *persistait dans la forme qu'elle affecte à l'instant considéré.*

S'agit-il maintenant de la directrice du point m sur la ligne s? Il est clair que, sans altérer en rien le mouvement angulaire de cette directrice, on peut *toujours restreindre à la partie située en avant du point* m le changement de

* Lorsqu'on se donne une détermination particulière de la ligne s et un point quelconque m' supposé fixe sur cette ligne, toute droite fixe, qui est menée par le lieu actuel de ce point et que la ligne s ne cesse pas de rencontrer au sortir du lieu qu'elle occupe, peut être considérée comme fixant, par rapport au point m', la direction qu'il suit en se déplaçant avec la ligne s, à l'origine du changement qu'elle subit. Si la ligne s ne changeait pas de forme, le choix de cette droite ne cesserait point pour cela de rester arbitraire. Il s'ensuivrait seulement que pour toute direction choisie en dehors de celle qui correspondrait à l'invariabilité de forme, la ligne s devrait être considérée comme changeant en même temps de forme et de position. Cette circonstance ne modifie en rien les déductions suivantes.

$f_y'(x, y)$ ne dépend pas de la variable x, ou qu'au contraire, elle en est dépendante.

Considérons d'abord le premier cas, celui où la dérivée $f_y'(x, y)$ ne dépend pas de la variable x. En ce cas, une même vitesse parallèle à l'axe OZ anime, en même temps, tous les points de la ligne s. La conséquence évidente est que cette ligne sort du lieu cc' comme si elle était de forme invariable et qu'elle se mût par translation avec la vitesse $\dot{z}_y$ parallèle à l'axe OZ.

Soit m un point mobile sur la ligne s et déterminé en position

forme subi par la ligne s. On sait, d'ailleurs, que dans la description d'une ligne par un point, la vitesse angulaire de la directrice dépend de la courbure de la ligne au lieu occupé par le point décrivant, et non pas de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle cette courbure varie dans le passage d'un lieu à un autre. De là résultent immédiatement les déductions suivantes :

1° La forme affectée par la ligne s en deçà du point m' peut être regardée comme invariable à partir de l'instant où le point m sort du lieu n.

2° Si, plus tard, il y a changement de forme pour la partie de la ligne s située au delà du point m', ce changement n'a d'autre effet que de modifier la rapidité plus ou moins grande avec laquelle la courbure varie sur la ligne s à partir du point m'.

3° Lorsque le point m sort du lieu n, la directrice de ce point sur la ligne s tourne, par rapport à la droite D, avec la même vitesse que si la ligne s persistait dans sa forme actuelle.

4° En désignant cette vitesse par w, la vitesse totale $\dot{\alpha}$ avec laquelle la directrice du point m sur la ligne s tourne dans le plan P, au sortir du lieu n, est égale à la somme $w + \omega' = \dot{\alpha}$.

Les résultats qui précèdent se résument en un théorème susceptible d'être énoncé comme il suit :

Lorsqu'une ligne de forme incessamment variable est décrite par un point mobile, l'état de mouvement de ce point et celui de sa directrice sont les mêmes que si la ligne persistait dans la forme qu'elle affecte à l'instant que l'on considère, rien, d'ailleurs, n'étant changé ni dans la vitesse du lieu occupé sur la ligne par le point décrivant, ni dans la vitesse angulaire de la tangente en ce lieu.

La partie de cette démonstration qui se rapporte à la détermination de la vitesse totale u suffit pour qu'on puisse en déduire immédiatement la relation générale $\dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y$, et, comme conséquence de cette relation, l'égalité finale $\dot{\alpha} = \omega' + w$. (Voir au besoin le texte du n° 38 et la première note du n° 39.)

par les valeurs attribuées en même temps, l'une à la variable y, l'autre à la variable x. Supposons d'abord le point m placé en n sur la ligne cc'. Lorsque les grandeurs x, y varient simultanément, la ligne s sort du lieu cc' en se déplaçant par translation avec la vitesse $\dot{z}_y$ commune à tous ses points. Il suit de là qu'elle communique au point m cette même vitesse. D'un autre côté, le point m glisse sur la ligne s comme si elle était invariable et fixe, c'est-à-dire comme si la grandeur y demeurait constante. De là résulte pour le point m une vitesse propre, dirigée suivant la tangente en n à la ligne cc' et ayant pour composante parallèle à l'axe OZ la vitesse $\dot{z}_x$. Cette composante s'ajoute à la vitesse $\dot{z}_y$, de manière à former la vitesse totale $\dot{z}$: on a donc, en conséquence,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \dot{z} = \dot{z}_x + \dot{z}_y = \dot{x} f_x'(x, y) + \dot{y} f_y'(x, y).$$

Considérons, en second lieu, le cas où la dérivée $f_y'(x, y)$ dépend de la variable x, et désignons par m' le point de la ligne s qui sort du lieu n en glissant sur l'ordonnée pn. En ce cas, la vitesse $\dot{z}_y$ est variable avec x pour les différents points de la ligne cc'. Rien, d'ailleurs, n'est changé ni dans la vitesse $\dot{z}_y$ avec laquelle le point m' glisse sur l'ordonnée pn au sortir du lieu n, ni dans la vitesse $\dot{z}_x$ avec laquelle le point m s'écarte en même temps du point m'. La seule modification consiste en ce que la directrice du point m sur la ligne s, au lieu de tourner, comme dans le premier cas, avec la vitesse qui correspond à la courbure affectée en n par la ligne cc', tourne avec cette même vitesse accrue ou diminuée d'une certaine quantité *. Or, ici, il n'importe en rien que cette directrice tourne plus ou moins vite : cela n'altère ni sa direction première,

* On peut se représenter la ligne cc' comme glissant, sans changer de forme, avec la vitesse du point m' sur l'ordonnée pn, et comme tournant en même temps autour de ce point de manière à ramener le point m sur sa trajectoire. Cette rotation devant être prise à l'instant précis où le point m sort du lieu n et se confond, en conséquence, avec le point m', il est visible qu'elle n'altère, ni en direction, ni en grandeur, la vitesse actuelle du point m sur la ligne cc'.

ni la vitesse qui anime le point m suivant cette même direction. On a donc, comme dans le premier cas,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \qquad \dot z = \dot z_x + \dot z_y = \dot x\, f_x'(x, y) + \dot y\, f_y'(x, y)\ ^{*}.$$

* Étant données trois droites parallèles et non situées dans un même plan, prenons ces droites pour lieux des points qui décrivent les longueurs substituées comme équivalents numériques aux grandeurs x, y, z. Soient a, b, c, trois positions simultanées des points décrivants et P le plan qu'elles déterminent. Par hypothèse, le point a correspond à la grandeur x, le point b à grandeur y, le point c à la grandeur z. Sur la droite ca déterminons le point f par la condition $\frac{fc}{af} = f_x'(x, y)$ et tirons la droite bf. Il est visible qu'une rotation établie autour de bf de manière à communiquer au point a la vitesse $\dot x$ communique en même temps au point c la vitesse

$$\dot z_x = \frac{fc}{af}\,\dot x = \dot x.\, f_x'(x, y)$$

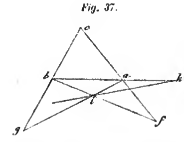


Fig. 37.

Sur la droite cb déterminons le point g par la condition $\frac{gc}{gb} = f_y'(x, y)$ et tirons la droite ag. Il est visible qu'une rotation établie autour de ag de manière à communiquer au point b la vitesse $\dot y$, communique en même temps au point c la vitesse

$$\dot z_y = \frac{gc}{gb}\,\dot y = \dot y.\, f_y'(x, y).$$

Soit i le point d'intersection des deux droites bf, ag. Les rotations établies autour de ces droites se composent en une rotation unique établie autour d'une droite passant par le point i et communiquant au point c la vitesse totale

$$\dot z = \dot z_x + \dot z_y = \dot x\, f_x'(x, y) + \dot y\, f_y'(x, y).$$

De là résulte, eu égard à l'équation (6) du n° 38, la conclusion suivante :

Il existe un point i *complétement déterminé par rapport aux points* a, b, c, *par les valeurs respectives des dérivées partielles* $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$. *La dépendance établie entre les vitesses simultanées* $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, *par l'équation*

Pour étendre la règle exprimée par l'équation (6) aux fonctions qui comprennent un nombre quelconque de variables, il suffit de réduire ce nombre à deux au moyen des relations qui subsistent entre les variables données ou qu'on peut établir entre elles arbitrairement. De là résulte la règle générale énoncée comme il suit:

La différentielle d'une fonction composée ou complexe est la somme des différentielles qu'on obtient en distinguant dans la fonction ses éléments variables, et en opérant successivement pour chaque élément distinct comme s'il était seul variable, tandis que tous les autres sont supposés constants.

59. Sans rien changer à ce qui précède, nommons

D la tangente en m' à la ligne s,
α l'angle de la droite D avec l'axe OX *,

$z = f(x, y)$, *consiste essentiellement en ce que la caractéristique du plan* P *est assujettie à passer par le point* i.

Soit h le point de la droite ab pour lequel on a $\frac{ah}{bh} = \frac{x}{y}$. A cette valeur du rapport $\frac{x}{y}$ correspond une position particulière de la caractéristique du plan P. Cette position est donnée par la droite hi. On voit ainsi comment la caractéristique du plan P tourne autour du point i, lorsqu'on dispose du rapport $\frac{x}{y}$ et qu'on le fait varier continûment.

La faculté qu'on a de disposer comme on veut les trois points a, b, c, implique, comme conséquences, plusieurs théorèmes de géométrie qu'il suffit d'indiquer en passant.

* On sait que pour chaque valeur attribuée à y, la ligne s est complétement définie de forme et de position. On sait également que, pour chaque valeur attribuée à x, la position du point m sur la ligne s est entièrement déterminée. De là résulte nécessairement

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha = \varphi(x, y).$$

Soit $\dot{\alpha}_x$ ce que devient la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$, lorsqu'on suppose $y =$ constante, c'est-à-dire lorsque le point m sort du lieu n en glissant sur la ligne cc'. Soit de même $\dot{\alpha}_y$ ce que devient la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$, lorsqu'on suppose $x =$ constante, c'est-à-dire lorsque le point m sort du lieu n en glissant sur

ς l'angle ZOX, supposé quelconque,
ι le rapport $\sin \alpha : \sin(\varsigma - \alpha)$,
m'' la projection du point m sur la ligne cc', cette projection étant faite par une droite parallèle à l'axe OZ.

De même qu'en se séparant du point n, le point m'' détermine la direction première de la tangente D, de même en s'écartant l'un de l'autre au sortir du lieu n les points m, m' déterminent la vitesse angulaire de cette même tangente à l'origine de son déplacement.

Fig. 38.

Soit n' un point pris sur la droite D, alors que cette droite touche en n la ligne cc'. Tirons l'ordonnée $p'n'$ et désignons par μ un point mobile assujetti à rester en même temps sur cette ordonnée et sur la droite D.

Plaçons-nous à l'instant précis où la droite D sort du lieu nn' et représentons par u l'excès de la vitesse du point μ sur celle du point m'. Il est visible que la rotation de la droite D

l'ordonnée pn. Appliquée à l'équation (1), la règle du n° 38 donne immédiatement

(2) . . . . $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_x + \dot{\alpha}_y$

L'équation (2) exprime qu'à l'instant précis où le point m sort du lieu n, la directrice du point m sur sa trajectoire tourne comme si la ligne s conservait sa forme actuelle cc' et tournait avec la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_y$. Ce résultat peut s'établir *à priori* par des considérations très-simples. En effet, puisque le changement de forme est soumis, par hypothèse, à la loi de continuité, il serait absurde de supposer que la rotation de la directrice du point m sur la ligne s pût être, par rapport à cette ligne, moindre ou plus grande que le comporte la courbure actuelle au point n. On voit ainsi que l'équation (2) subsiste nécessairement, la ligne s pouvant être considérée comme invariable de forme, et dès lors comme n'ayant d'autre mouvement angulaire que celui qui correspond à son déplacement et qui commence avec la vitesse $\dot{\alpha}_y$.

Il est aisé de voir comment les déductions du n° 38 conduisent directement à la théorie des enveloppes, comment aussi l'extension qu'elles comportent permet de les prendre pour base du calcul des variations. Nous reviendrons plus loin sur ces applications

autour du point m' est précisément la même que si ce point demeurait en n et que le point μ sortît du lieu n' en glissant sur l'ordonnée $p'n'$ avec la vitesse u. Or, dans cette hypothèse, on a

$$(1) \ldots\ldots \quad p'n' = pn + pp'.t.$$

Il vient donc, en différentiant par rapport à $p'n'$ et à t,

$$u = pp'.\dot{t}.$$

Soit U la vitesse effective du point μ au sortir du lieu n', celle du point m', au sortir du lieu n, étant représentée par $\dot{z}_y$, on a, comme conséquence des données précédentes,

$$(2) \ldots\ldots \quad U = \dot{z}_y + pp'.\dot{t}.$$

L'équation (2) subsiste en même temps pour tous les points de la droite nn'. Il s'ensuit que si l'on veut déterminer la vitesse avec laquelle la grandeur U varie dans le passage d'un point à un autre sur la droite nn', il suffit de différentier en considérant les deux vitesses $\dot{z}_y$ et $\dot{t}$ comme constantes, et en prenant pour différentielle de la quantité variable pp' la vitesse $\dot{x}$ avec laquelle l'ordonnée $p'n'$ s'écarte de l'ordonnée pn en glissant sur l'axe OX. De là résulte immédiatement

$$(3) \ldots\ldots \quad U_x = \dot{x}.\dot{t}.$$

Veut-on appliquer l'équation (3) à la détermination de la vitesse angulaire qui anime la droite mm' à l'origine de son déplacement, lorsque les points m, m' sortent en même temps du lieu n? Tout se réduit à poser

$$U = \dot{z}_y = y\, f_y'(x, y).$$

Ce qui donne, d'abord,

$$(4) \ldots\ldots \quad U_x = \dot{y}.\dot{x}\, f''_{y.x}(x, y)\ ^{*}.$$

* Le symbole $f''_{y.x}(x, y)$ exprime le resultat de deux derivations faites successivement, la première par rapport à la variable y, la seconde par rap-

et, ensuite, eu égard aux égalités (3) et (4),

$$(5) \quad \dot{y}\, f''_{y,x}(x, y) = t.$$

Cela posé, observons que la quantité t a pour expression générale le rapport de la vitesse $\dot{z}_x = \dot{x}\, f'_x(x, y)$ à la vitesse $\dot{x}$. On peut donc écrire généralement

$$f'_x(x, y) = t.$$

De là résulte, en différentiant, dans l'hypothèse x = constante,

$$(6) \quad \dot{y}\, f''_{x,y}(x, y) = \dot{t}.$$

La comparaison des équations (5) et (6) conduit immédiatement à la relation finale

$$f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y).$$

On voit ainsi que, dans le cas de deux dérivations faites successivement par rapport à deux variables, le résultat définitif est indépendant de l'ordre suivi dans ces dérivations. Cette conséquence s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de dérivations successives faites sur une même fonction de n variables. De là le principe général énoncé comme il suit :

Quel que soit l'ordre dans lequel on effectue plusieurs dérivations successives, si l'ordre seul change et QUE TOUTES CHOSES SOIENT ÉGALES D'AILLEURS, *le résultat définitif reste toujours le même.*

40. Revenons à la règle générale du n° (38). Elle implique, comme cas particulier, la règle suivante :

La différentielle d'un produit est la somme des résultats qu'on obtient en substituant successivement à chaque facteur sa propre différentielle.

port à la variable x. On peut voir, à la fin du n° 35, quelles sont les conventions adoptées pour représenter, en général, les dérivées successives et partielles d'une même fonction à plusieurs variables.

Partant de là et opérant comme nous l'avons fait à partir du n° 10, on établit sans la moindre difficulté toutes les règles dont on a besoin pour la différentiation des fonctions élémentaires et des fonctions composées.

Il n'échappera point au lecteur, déjà initié aux divers procédés d'exposition de l'analyse transcendante, qu'en suivant la marche tracée par nous en dernier lieu, notre méthode réunit tous les avantages que les autres peuvent offrir séparément. Au point de vue de la rigueur, elle ne le cède en rien à la méthode des limites; au point de vue de la simplicité, elle égale au moins la méthode des infiniment petits. Suffisante par elle seule, elle offre toutes les ressources nécessaires; on peut d'ailleurs la combiner avec les méthodes connues, de manière à les compléter en leur donnant ce qui leur manque : à l'une la lumière et la fécondité, à l'autre la netteté et la certitude géométriques. Les applications ultérieures montreront mieux encore l'indépendance absolue et la supériorité relative de la conception fondamentale sur laquelle nous faisons reposer tous les développements de l'analyse transcendante.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CINÉMATIQUE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

DES DÉPLACEMENTS RECTILIGNES DE PLUSIEURS POINTS.

Du déplacement d'un point sur une courbe.

CHAPITRE II.

DE LA ROTATION D'UNE DROITE DANS UN PLAN.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT DANS L'ESPACE.

CHAPITRE V.

CINÉMATIQUE GÉNÉRALE DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE VI.

DES FORMES LES PLUS SIMPLES AUXQUELLES ON PEUT RÉDUIRE L'ÉTAT DE MOUVEMENT D'UNE FIGURE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE VII.

DES MOUVEMENTS ANGULAIRES PRIS A PART.

CHAPITRE VIII.

RÉSUMÉ GÉNÉRAL ET SIMPLIFICATIONS.

DEUXIÈME PARTIE.

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE DES CALCULS DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

CHAPITRE II.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

CHAPITRE III.

EXTENSION GÉNÉRALE DES RÈGLES PRÉCÉDENTES.

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

CHAPITRE V.

EXTENSION DES RÈGLES PRÉCÉDENTES AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

CHAPITRE VI.

RÉSUMÉ GÉNÉRAL ET SIMPLIFICATIONS.

FIN DE LA TABLE.